Kamil Daveluý

1 Matematická indukce

1) Matematickou indukcí ukažte, že $6 \cdot 7^n - 2 \cdot 3^n$ je dělitelné 4 pro každé $n \geq 1$.

Řešení:

Indukci povedeme podle n

1. Základní krok: pro $n = 1$ ověříme platnost $V(n)$ přímým výpočtem.

$$6 \cdot 7^1 - 2 \cdot 3^1 = 36 = 4 \cdot 9$$

Ověřili jsme, že $V(1)$ platí.

2. Indukční krok: zvolíme libovolné, ale pevné číslo $n \geq 1$.

Máme ukázat platnost $6 \cdot 7^{(n+1)} - 2 \cdot 3^{(n+1)} = 4k$, $k \in N$

můžeme levou stranu dekomponovat.

$$6 \cdot 7 \cdot 7^n - 2 \cdot 3 \cdot 3^n = 6 \cdot (3+4) \cdot 7^n - 2 \cdot 3 \cdot 3^n = 6 \cdot 3 \cdot 7^n + 6 \cdot 4 \cdot 7^n - 2 \cdot 3 \cdot$$

$$= 3(6 \cdot 7^n - 2 \cdot 3^n) + 6 \cdot 4 \cdot 7^n =$$

Nyní můžeme použít indukční předpoklad

$$6 \cdot 7^n - 2 \cdot 3^n = 4k, \; k \in N$$

$$= 3 \cdot 4k + 6 \cdot 4 \cdot 7^n = 4 \cdot j \quad j \in N$$

Důkaz indukcí je u konce. Použili jsme slabý princip matematické indukce.

Kamil Davelý

① Matematická indukce

2) Matematickou indukcí ukažte, že pro všechna $n \geq 0$ platí

$$\sqrt{0} + \sqrt{1} + \ldots + \sqrt{n} < \frac{2}{3}(n+1)\sqrt{n+1}$$

Řešení: Indukci povedeme podle n.

Nejprve přepíšeme na ekvivalentní zápis

$$\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k} < \frac{2}{3}(n+1)\sqrt{n+1}$$

1. Základní krok: ~~mě~~ pro $n = 0$ ověříme platnost $V(n)$

přímým výpočtem

$$\sqrt{0} < \frac{2}{3}(0+1) \cdot \sqrt{1}$$

$$0 < \frac{2}{3}$$

Ověřili jsme, že $V(0)$ platí.

2. Indukční krok: zvolme libovolné, ale pevné číslo $n \geq 0$

Máme ukázat platnost $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \sqrt{k} < \frac{2}{3}(n+2) \cdot \sqrt{n+2}$

Můžeme levou stranu dekomponovat

$$\sqrt{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k}$$

Nyní můžeme zformulovat indukční předpoklad, pro $n \geq 0$ platí

$$\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k} < \frac{2}{3}(n+1) \cdot \sqrt{n+1}$$

2) Pokračování

Indukční předpoklad ~~musíme~~ použijeme na levou dekomponovanou stranu rovnice

$$\sqrt{n+1} + \frac{2}{3}(n+1)\cdot\sqrt{n+1} < \frac{2}{3}(n+2)\cdot\sqrt{n+2}$$

Výše uvedenou nerovnici lze dokázat jednoduchými úpravami.
Všechny úpravy musí být reversibilní

$$\sqrt{n+1} + (2n+2)\sqrt{n+1} < (2n+4)\cdot\sqrt{n+2}$$

$$(n+1)(2n+5)^2 < (2n+4)^2(n+2)$$

$$(n+1)(4n^2+20n+25) < (4n^2+16n+16)(n+2)$$

$$4n^3+20n^2+25n+4n^2+20n+25 < 4n^3+16n^2+16n+8n^2+32n+32$$

$$45n+25 < 48n+32$$

$$-7 < 3n \quad n \geq 0$$

Všechny provedené úpravy jsou reversibilní.

Důkaz indukcí je u konce. Použili jsme slabý princip ~~model~~ matematické indukce.

Kamil Davelný

(1.3) Matematickou indukcí ukažte, že pro všechna $n \geq 0$ platí $\sum_{k=0}^{n} (k! k) = (n+1)! - 1$

Indukci povedeme podle n

1. základní krok: pro $n=0$ ověříme platnost $V(n)$ přímým výpočtem

$0! \cdot 0 = 1! - 1$

$0 = 0$

Ověřili jsme, že $V(0)$ platí

2. ~~Ind~~ Indukční krok: zvolíme libovolné, ale pevné číslo $n \geq 0$.

máme ukázat platnost $\sum_{k=0}^{n+1} (k! k) = (n+2)! - 1$, $k \in \mathbb{N}$

můžeme levou stranu dekomponovat

$$\sum_{k=0}^{n+1} (k! k) = (n+1)!(n+1) + \sum_{k=0}^{n} (k! k)$$

teď můžeme použít indukční předpoklad

$$\sum_{k=0}^{n} (k! k) = (n+1)! - 1$$

dostáváme

$$= (n+1)!(n+1) + (n+1)! - 1 = (n+1)!\left((n+1)+1\right) - 1 =$$

$$= (n+1)!(n+2) - 1 = (n+2)! - 1$$

Důkaz ~~matem~~ matematickou indukcí je u konce. Použili jsme slabý princip matematické indukce.