Kamil Dvořák

(2.1) Najděte obecné řešení rekurentní rovnice

$x(n+3) - 5x(n+2) + 8x(n+1) - 4x(n) = n \cdot 3^n + 2$

1) Nalezneme nejprve obecné řešení příslušné homogenní rovnice

$x(n+3) - 5x(n+2) + 8x(n+1) - 4x = 0$

$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$

$(\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4) : (\lambda - 1) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$

$-\lambda^3 + \lambda^2$

$-4\lambda^2 + 8\lambda - 4$

$4\lambda^2 - 4\lambda$

$4\lambda - 4$

$-4\lambda + 4$

0

$(\lambda - 1) \cdot (\lambda^2 - 4\lambda + 4)$

$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = \frac{4}{2} = 2 \qquad \lambda_3 = \frac{4}{2} = 2$

Každý z kořenů dodá jednu posloupnost do fundamentálního systému.

$\lambda_1 \longrightarrow 1^n$

$\lambda_2 \longrightarrow 2^n$

$\lambda_3 \longrightarrow n \cdot 2^n$

Obecné řešení $x(n+3) - 5x(n+2) + 8x(n+1) - 4x = 0$ je lineární kombinací fundamentálního systému

$a \cdot 1^n + b \cdot 2^n + c \cdot n \cdot 2^n$

Kamil Dvořný

(2.1) Pokračování

2 b) vyřešíme partikulární řešení rovnice

$$x(n+3) - 5x(n+2) + 8x(n+1) - 4x = 2$$

řešení odhadneme ve tvaru

$$n^1 \cdot 1^n \cdot a = n \cdot a$$

Určíme koeficient a dosazením do rovnice.

$$(n+3) \cdot a - 5((n+2) \cdot a) + 8((n+1)\, a) - 4(n \cdot a) = 2$$

$$na + 3a - 5na - 10a + 8na + 8a - 4na = 2$$

$$a = 2$$

Partikulárním řešením je tedy posloupnost $2n$.

Celkové partikulární řešení je tedy

$$3^n\left(\frac{1}{2}n - \frac{15}{4}\right) + 2n$$

3) Celkové obecné řešení nehomogenní rovnice je součtem partikulárního řešení a obecného řešení homogenní rovnice jde o posloupnost

$$a + b \cdot 2^n + c \cdot n \cdot 2^n + 3^n\left(\frac{1}{2}n - \frac{15}{4}\right) + 2n$$

Kamil Dvořák

(2.2) Řešte rekurentní rovnici s počátečními podmínkami

$$A(n) = -2A(n-1) + 3A(n-2) + 4, \quad A(0)=1, \quad A(1)=5$$

1) Nalezneme nejprve obecné řešení příslušné homogenní rovnice

$$A(n) + 2A(n-1) - 3A(n-2) = 0$$

rovnice má charakteristickou rovnici

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$

$$t_1 = \frac{-2+4}{2} = 1$$

$$t_2 = \frac{-2-4}{2} = -3$$

Každý z kořenů dodá jednu posloupnost do fundamentálního systému.

$$t_1 \to 1^n$$

$$t_2 \to (-3)^n$$

Obecné řešení $A(n) + 2A(n-1) - 3A(n-2) = 0$, je lineární kombinací fundamentálního systému.

$$a \cdot (1)^n + b \cdot (-3)^n$$

(2.2) pokračování

2) Nalezneme partikulární řešení

Partikulární řešení rovnice $A(n) + 2A(n-1) - 3A(n-2) = 4$

odhadneme ve tvaru $n^1 . 1^n . a = na$

Určíme koeficient a dosazením do rovnice

$$n.a + 2.((n-1).a) - 3((n-2).a) = 4$$

$$na + 2.(na - a) - 3(na - 2a) = 4$$

$$na + 2na - 2 - 3na + 6a = 4$$

$$6a = 6$$

$$a = 1$$

Partikulárním řešením je tedy posloupnost n

3) Celkové (obecné) řešení nehomogenní rovnice je součtem partikulárního řešení a obecného řešení homogenní rovnice. Jde o posloupnost

$$a + b(-3)^n + n$$

získané obecné řešení nyní dosadíme do počátečních podmínek

$$1 = A(0) = a + b.(-3)^0 + 0$$

$$5 = A(1) = a + b.(-3)^1 + 1$$

Kamil Daněl(?)ý

(2.2) pokračování

Dostáváme soustavu rovnic pro a a b

$1 = a + b \quad \Rightarrow \quad a = 1 - b$

$5 = a - 3b + 1$

$5 = 1 - b - 3b + 1$

$5 = 2 - 4b$

$b = -\frac{3}{4}$

$a = 1 + \frac{3}{4}$

$a = \frac{7}{4}$

Hledané řešení splňující počáteční podmínky je posloupnost

$\frac{7}{4} + \left(-\frac{3}{4}\right)(-3)^n + n$

Kamil Darebný

(2·3) Odvoďte vzorec pro součet řady $S(n) = \sum_{k=0}^{n} 2^k k^2$

Odvodíme rekurentní rovnici

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n} 2^k k^2 = 2^n n^2 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \cdot k^2 = 2^n \cdot n^2 + S(n-1)$$

dostáváme rekurentní rovnici

$$S(n) - S(n-1) = 2^n \cdot n^2$$

vyžaduje 1 počáteční podmínku

$$S(0) = \sum_{k=0}^{0} 2^k \cdot k^2 = 0$$

Dále budeme řešit rekurentní rovnici

1) Nalezneme nejprve obecné řešení příslušné homogenní rovnice

$$S(n) - S(n-1) = 0$$

rovnice má charakteristickou rovnici

$$\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = 1$$

Každý z kořenů dodá jednu posloupnost do fundamentálního systému.

$$\lambda_1 \rightarrow 1^n$$

Obecné řešení $S(n) - S(n-1) = 0$, je lineární kombinací

fundamentálního systému

$$a \cdot 1^n = a$$

(2.3) pokračování

2) nalezneme partikulární řešení rovnice

$$S(n) - S(n-1) = 2^n \cdot n^2$$

řešení odhadneme ve tvaru

$$n^0 \cdot 2^n(an^2 + bn + c) = 2^n(an^2 + bn + c)$$

určíme koeficienty dosazením do původní rovnice

$$2^n(an^2 + bn + c) - 2^{(n-1)}(a(n-1)^2 + b(n-1) + c) = 2^n \cdot n^2 \quad \Big/ \tfrac{1}{2^{(n-1)}}$$

$$2(an^2 + bn + c) - (a(n-1)^2 + b(n-1) + c) = 2n^2$$

$$2an^2 + 2bn + 2c - an^2 - 2an - a - bn + b - c = 2n^2$$

$$an^2 + bn + 2an + c - a + b = 2n^2$$

$$an^2 + (b+2a)n + c - a + b = 2n^2$$

$$a = 2 \Rightarrow a = 2$$
$$b + 2a = 0 \Rightarrow b = -4$$
$$c - a + b = 0 \Rightarrow c = 6$$

Partikulárním řešením je tedy posloupnost

$$2^n(2n^2 - 4n + 6)$$

Kamil Davelý

2.3 pokračování

3) Celkové (obecné) řešení nehomogenní rovnice je součtem partikulárního řešení a obecného řešení homogenní rovnice.

Jde o posloupnost

$$a + 2^n(2n^2 - 4n + 6)$$

Získané obecné řešení dosadíme do počátečních podmínek.

$$0 = S(0) = a + 2^0(2 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 6)$$

$$0 = a + 1 \cdot (2 \cdot 1 - 0 + 6)$$

$$0 = a + 6$$

$$a = -6$$

Řešením je odvozený vzorec pro součet řady

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n} 2^k \cdot k^2 = -6 + 2^n(2n^2 - 4n + 6)$$