

5.1 $\forall \mathbb{Z}_7$ řešte soustavu s parametrem a :

$$3x + y + 2z + 4w = 2$$

$$5x + 4y + z + 3w = 3$$

$$x + 5y + 3z = a$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & a \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 & a \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2a+3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4a+2 \end{array} \right)$$

$$4w = 4a + 2$$

$$2 \cdot 4w = 2(4a + 2)$$

$$w = a + 4$$

$$a = w - 4$$

$$3w = 2a + 3$$

$$3w = 2(w - 4) + 3$$

$$3w = 2w + 6 + 3$$

$$w = 2$$

$$a = 5$$

$$z = 1 \quad 1 \in \mathbb{Z}_7$$

$$y = 0 \quad 0 \in \mathbb{Z}_7$$

$$x = 5 - 3z - 5y = 5 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1$$

$$(x, y, z, w) = (5 + 2z + 4t, 0, t, 2)$$

$$(5, 0, 0, 2) + 0(2, 1, 0, 0) + 1(4, 0, 1, 0) \text{ pro } a = 5$$

počet řešení: 7^2 .

Pro $a \neq 5$ nemá řešení.

5.2 V \mathbb{Z}_6 je dána matice $A_t = \begin{pmatrix} t & 2 \\ 1 & t+2 \end{pmatrix}$

Najděte všechny hodnoty parametru t , pro které existuje A_t^{-1} ,
a příslušné inverzní matice vypočítejte.

$n = \mathbb{Z}_6$

$\det A_t = t(t+2) - 2 = t^2 + 2t - 2$

$t = 0$

$\det A_0 = -2 = 4$ nemá inverzi

$t = 1$

$\det A_1 = 1 + 2 - 2 = 1$

$t = 2$

$\det A_2 = 4 + 4 - 2 = 6 = 0$ nemá inverzi

$t = 3$

$\det A_3 = 9 + 6 - 2 = 13 = 1$

$t = 4$

$\det A_4 = 16 + 8 - 2 = 22 = 4$ nemá inverzi

$t = 5$

$\det A_5 = 25 + 10 - 2 = 33 = 3$ nemá inverzi

hledáme inverzní matice pro $t=1$ a $t=3$

podle vzorce $A^{-1} = \det A^{-1} \cdot D^T$

Matice D má na místě (i, j) algebraický doplněk A_{ij} prvku a_{ij} matice A .

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$

Kamil Dvorník

5.3) je dána generující matice G lineárního kódu nad \mathbb{Z}_5 .

Najděte nějakou kontrolní matici H tohoto kódu a pomocí ní ověřte, zda bylo slovo $v = (2\ 2\ 1\ 1\ 3)$ přijato bez chyb.

Pokud to jde, tak případnou chybu opravte (předpokládáme, že nedošlo více než k jedné chybě).

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

použijeme Gausovu eliminační metodu

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

hodnost matice je 2

v řádcích hledané matice H budou prvky fundamentálního systému homogenní rovnice

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

počet prvků fundamentálního systému je $5 - 2 = 3$ (z Frobeniusovy věty)
jejich tvar bude

$$(a_1, a_2, 1, 0, 0) \quad (b_1, b_2, 0, 1, 0) \quad (c_1, c_2, 0, 0, 1)$$

a) dopočítáme a_1 a a_2

$$0a_1 + 2a_2 + 1 + 0 + 0 = 0$$

$$2a_2 = -1$$

$$2a_2 = 4$$

$$a_2 = 2$$

$$2a_1 + 2 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$2a_1 = -2$$

$$2a_1 = 3$$

$$a_1 = 4$$

$$(4, 2, 1, 0, 0)$$

5.3 pokračování

b) dopočítáme b_1 a b_2

$$0b_1 + 2b_2 + 1 + 0 + 0 = 0$$

$$2b_1 + 2 + 0 + 3 + 0 = 0$$

$$\cancel{2b_1} + 2b_2 = -1$$

$$2b_1 = -5$$

$$2b_2 = 4$$

$$2b_1 = 0$$

$$b_2 = 2$$

$$b_1 = 0$$

$$(0, 2, 0, 1, 0)$$

c) dopočítáme c_1 a c_2

$$0 \cdot c_1 + 2c_1 + 0 + 0 + 3 = 0$$

$$2c_1 + 1 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$2c_1 = -3$$

$$2c_1 = -1$$

$$2c_1 = 2$$

$$2c_1 = 4$$

$$c_1 = 1$$

$$c_1 = 2$$

$$(2, 1, 0, 0, 1)$$

$$H = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

přijaté slovo obsahuje chybu

1. sloupec matice H je ve výsledku 2krát.

přijaté slovo opravíme následovně

$$(2, 2, 1, 1, 3) - (2, 0, 0, 0, 0) = (0, 2, 1, 1, 3)$$