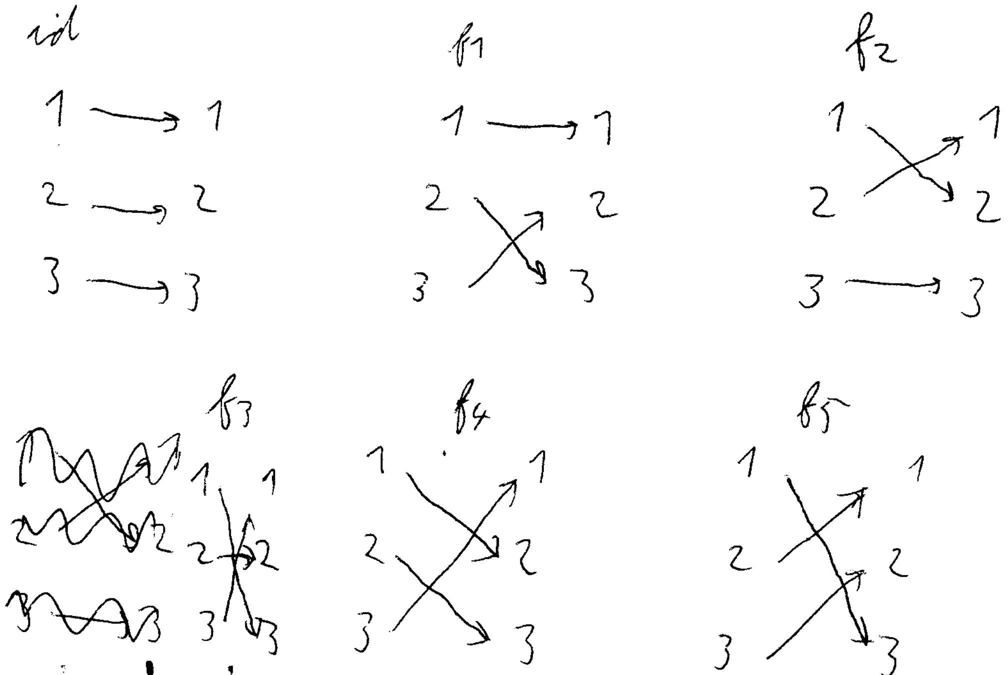
Kamil Darebný

7.1 Množina A se skládá ze všech vzájemně jednoznačných zobrazení $f: \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$. Napište tabulku monoidu $(A, \circ)$, kde $\circ$ je skládání zobrazení, a rozhodněte, zda se jedná o pologrupu, monoid či grupu. Je operace komutativní.

$A = \{ f: \{1,2,2\} \to \{1,2,3\} \text{ ; kde } f \text{ je jednoznačné zobrazení} \}$

prvky A

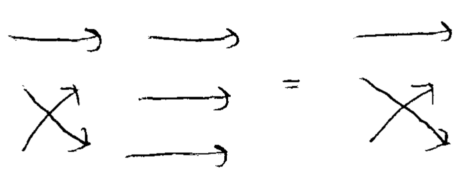


$\circ$	id	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
id	id	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1	id	f_5	f_4	f_3	f_2
f_2	f_2	f_4	id	f_5	f_1	f_3
f_3	f_3	f_5	f_4	id	f_2	f_1
f_4	f_4	f_2	f_3	f_1	f_5	id
f_5	f_5	f_3	f_1	f_2	id	f_4

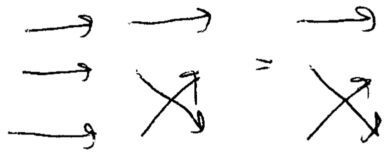
7.1 pokračování

$$(f\circ g)(x) = f(g(x))$$

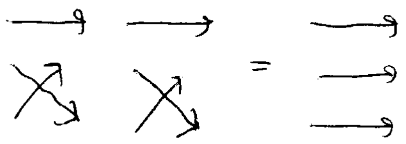
$id \circ f_1 \qquad f_1$



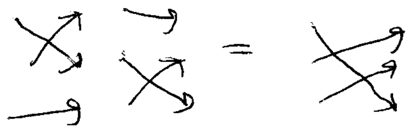
$f_1 \circ id \qquad f_1$



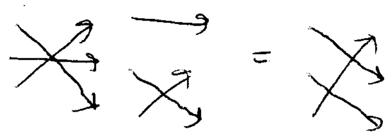
$f_1 \circ f_1 \qquad id$



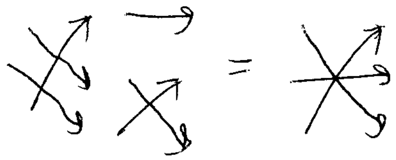
$f_1 \circ f_2$



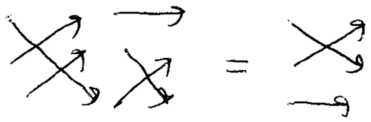
$f_1 \circ f_3 \qquad f_4$



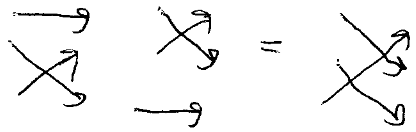
$f_1 \circ f_4 \qquad f_3$



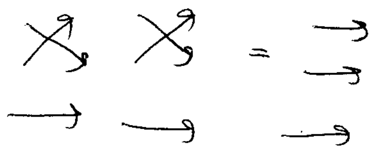
$f_1 \circ f_5 \qquad f_2$



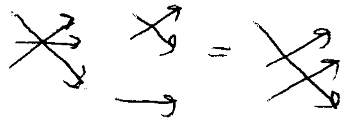
$f_2 \circ f_1 \qquad f_4$



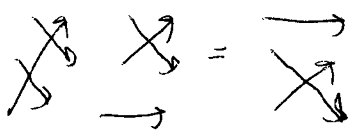
$f_2 \circ f_2 \qquad id$



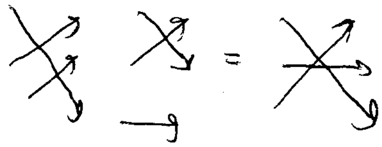
$f_2 \circ f_3 \qquad f_5$



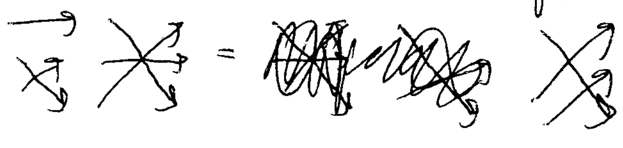
$f_2 \circ f_4 \qquad f_1$



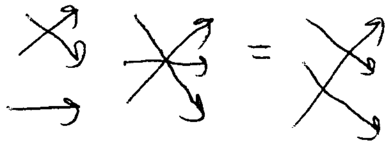
$f_2 \circ f_5 \qquad f_3$



$f_3 \circ f_1 \qquad f_5$

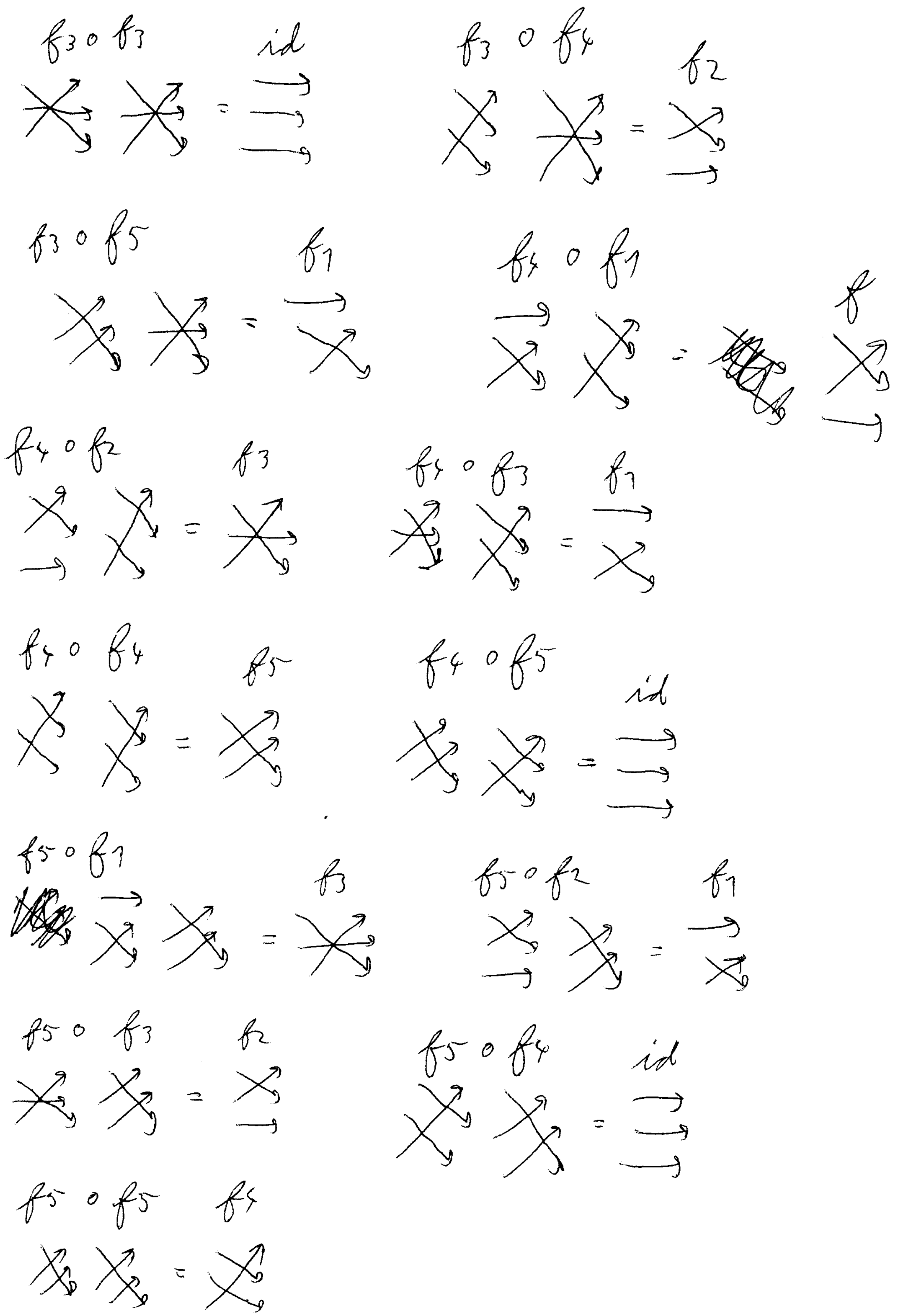


$f_3 \circ f_2 \qquad f_4$



7.1 pokračování

Kamil Darebný



(9.1) pokračování

grupoid binární operace definovaná všude, výsledek z A

skládání funkcí je asociativní

neutrální prvek je id (přepisuje záhlaví sloupce i řádku)

inverz ? ano v každém sloupci i řádku máme neutrál

komutativní ? NE (není symetrická dle diagonály)

(A, ∘) je nekomutativní grupa

Kamil Darebný

7.2 Na množině R reálných čísel je definována relace * předpisem $x * y = x + y + x^2 y$. Dokažte, že operace * má neutrální prvek, má všechny pravé inverzní prvky, ale nemá všechny levé inverzní prvky.

a) neutrální prvek

$\exists e \ \forall a \in \mathbb{R} \quad a * e = a \quad a \quad e * a = a$

v první rovnosti přepíšeme levou část podle definice *

$a + e + a^2 e = a$

$e + a^2 e = 0$

$e(1 + a^2) = 0$

$e = 0$

pokud ukážeme, že $0 * a = a$ pro $\forall a$, je 0 neutrální prvek operace *

$0 * a = a$

$0 + a + 0 \cdot a^2 = a$

$a = a$

0 je neutrální prvek operace *

b) má všechny pravé inverzní prvky

$\forall a \ \exists a^{-1} \quad a \in \mathbb{R} \wedge a^{-1} \in \mathbb{R} \quad a * a^{-1} = e$

levou stranu přepíšeme podle definice

$a + a^{-1} + a^2 \cdot a^{-1} = 0$

$a^{-1} + a^2 \cdot a^{-1} = -a$

$a^{-1} = -\frac{a}{1 + a^2} \qquad 1 + a^2 > 0$ pro $\forall a \in \mathbb{R}$

Tedy pro všechna a existuje existuje jednoznačný pravý inverze.

7.2 pokračování

c) nemá všechny levé inverzní prvky

$$a^{-1} * a = e$$

přepíšeme levou stranu podle definice

$$a^{-1} + a + (a^{-1})^2 \cdot a = 0$$

~~~~

$$(a^{-1})^2 + a^{-1} + a = 0$$

diskriminant $D = 1 - 4a^2$

například pro $a = 1$ $D < 0$

tedy v R neexistuje řešení, proto neexistují všechny levé inverzní prvky.
~~~~

(7.3) Kamil Dvořský

Označme M množinu všech čtvercových matic

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

kde a, b jsou celá čísla. Ukažte, že M spolu s násobením matic tvoří grupoid. Je M monoid? (Asociativitu maticového násobení ověřovat nemusíte). Které prvky z ~~...~~ M ~~...~~ mají inverzní prvek v M?

a) grupoid

$(A, *)$ $\quad * \; A \times A \to A$ binární operace (definovaná všude, výsledek z A)

$$x * y = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -bc - ad & -bd + ac \end{pmatrix}$$

$ac - bd = r$
$ad + bc = s$
$$= \begin{pmatrix} r & s \\ -s & r \end{pmatrix} \in M$$

tvoří grupoid

b) je to monoid?

musí být grupoid, operace $*$ musí být asociativní a mít neutrál

Ze zadání nemáme ověřovat asociativitu maticového násobení.

Ověříme pouze, že operace $*$ má neutrální prvek

$\exists e \; \forall a \quad a \in M \qquad a * e = a$
$\qquad\qquad\qquad\qquad e * a = a$

předpokládáme, že neutrální prvek je $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ukážeme, že pro $\forall a$ platí

$a * e = a$
$e * a = a$

(7.3) pokračování

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M$$

má neutrální prvek

$(M, *)$ je monoid

i) které prvky z M mají inverzní prvek v M?

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}(a) = a$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}(-b) = b$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}(b) = -b$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}(a) = a$$

$$A^{-1} = \det A^{-1} (D)^T =$$

$$(a^2+b^2)^{-1}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & -\frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$$

v $\mathbb{Z}$ existují pouze tyto řešení

1) $a = 1 \quad b = 0$

2) $a = 0 \quad b = 1$

3) $a = -1 \quad b = 0$

4) $a = 0 \quad b = -1$

Inverzní prvek mají pouze tyto prvky

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$