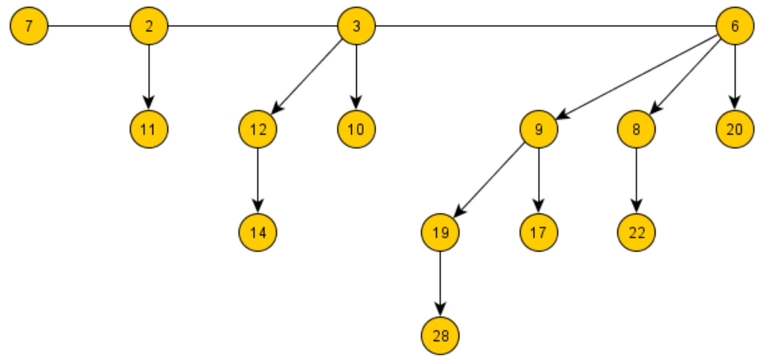
Binomiální halda



= Binomial heap

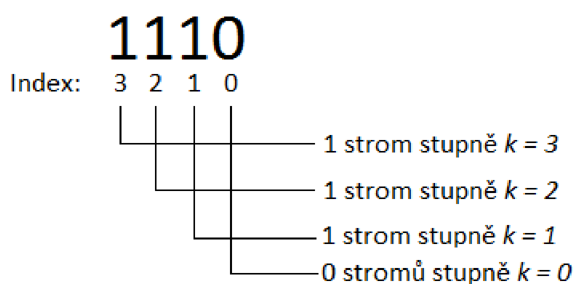
- je halda složená z posloupnosti binomiálních stromů
- halda NENÍ strom, ale skládá se ze stromů
- platí ***h*** vlastnost – zajišťuje se při slučování
- stromy jsou uspořádané
- každý stupeň je zastoupen pouze jednou
- binomiální halda má výhodu v rychlejších operacích sloučení hald O(log n) a vložení prvku – amortizovaně O(1)
- halda není optimální pro vyhledávání
- binom. halda má odkaz na strom s nejnižším stupněm, FH má odkaz na strom, obsahující MAX

Binomiální strom

- je rekurzivně definován
- binomiální strom stupně ***n*** vznikne sloučením dvou stromů stupně ***n – 1*** tak, že kořen jednoho se stane nejlevějším synem druhého
- při sloučení porovnáme prioritu kořenů obou stromů a následně ten s nižší prioritou zavěsíme pod kořen s vyšší prioritou.
- binonomiální strom stupně 0 obsahuje právě jeden uzel
- stupeň stromu = počet synů, ne hloubka stromu
- platí ***h*** vlastnost = všichni potomci jsou menší než daný uzel, tzn. každý prvek každého stromu má vyšší prioritu, než kterýkoliv z jeho potomků, halda se proto chová jako prioritní fronta

Binomiální halda obsahuje maximálně jeden strom každého řádu.

- Binomiální strom stupně ***n*** obsahuje 2^n uzlů.
- Binomiální strom stupně ***n*** má hloubku ***n***.
- Binomiální halda stupně ***n*** má právě jeden strom stupně ***n***.
- Kořen binomiální stromu má ***n*** potomků.
- Kořen binomiálního stromu obsahuje jako své potomky všechny stromy nižších řádů.
- V hloubce ***i*** je (***n*** nad ***i***) uzlů
- Při slučování stromů ***k*** a ***l*** - ***k = l***, sloučí se do stromu stupně ***k + 1***
  - ***k != l***, lze sloučit do haldy



stupeň stromu	počet stromů (binárně) = potence haldy				počet vnitřních uzlů
	3	2	1	0	
0				1	0
1			1		1
0 a 1			1	1	2
2		1			3
0 a 2		1		1	4
1 a 2		1	1		5
0 a 1 a 2		1	1	1	6
3	1				7

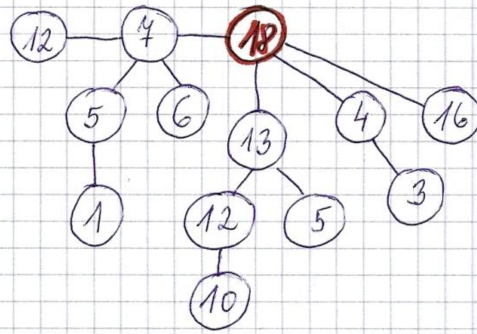
Základní operace binomiální haldy

Operace jsou popsány pro min-heap – nižší prvek má vyšší prioritu. Max-heap (tj. vyšší prvek má vyšší prioritu) funguje analogicky.

Vložení

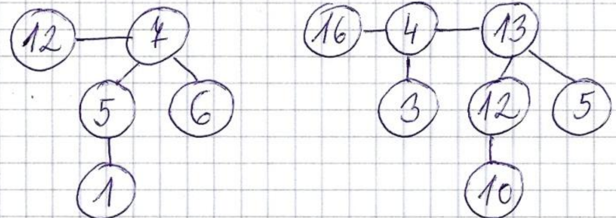
- vloží prvek do haldy
- vytvoří pro prvek binomiální strom řádu 0
- a provede sloučení tohoto stromu s haldou
- pokud vkládáme prvek s nižší prioritou, než je priorita současného nejnižšího prvku haldy, tak tento prvek označíme za minimální

- asymptotická složitost operace je O(log n), amortizovaná složitost O(1)



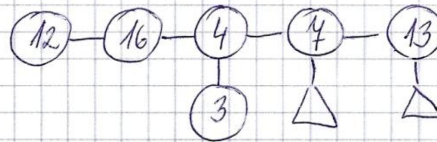
Mazání

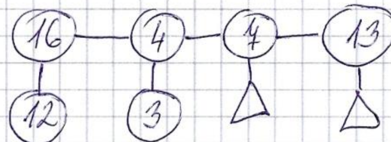
- mazané číslo zvětším na hodnotu > kořen
- přesunu ho do kořene
- smažu prvek
- syny přesunu do kořenů, čímž vytvořím novou haldu
- sloučím haldy zpět do jedné
- složitost je O(log n), protože při nalezení prvku musí projít všechny stromy



Chci smazat MAX (MIN) prvek – tj. č. 18

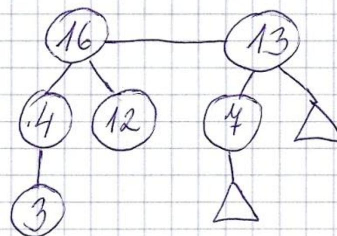
- hledám MAX (MIN) prvek – vždy v kořenech
- složitost O(log n), protože musíme projít všechny stromy
- prvek smažu a vytvořím novou haldu tím, že po odstranění kořene přesunu všechny syny do seznamu, tj. udělám z nich kořeny nových stromů
- následně stromy spojím
- spojuji je tak dlouho, až je to binom. halda





Merge

- funkce, která provede sloučení haldy B do haldy A
- tato operace odpovídá sčítání dvou binárních čísel
- algoritmus prochází obě haldy od nejnižšího řádu
- pokud halda B obsahuje strom řádu ***n*** a halda A nikoliv, pak jej pouze překopíruje
- pokud obě haldy obsahují stromy stejného řádu, tak je sloučí do přenosového stromu (obdoba přenosového bitu u sčítání), který zohlední při následném spojování stromů řádu ***n + 1***
- nakonec porovná minimální prvky obou slučovaných hald a za minimální prvek výsledné haldy označí nižší z nich
- asymptotická složitost operace je O(log n)

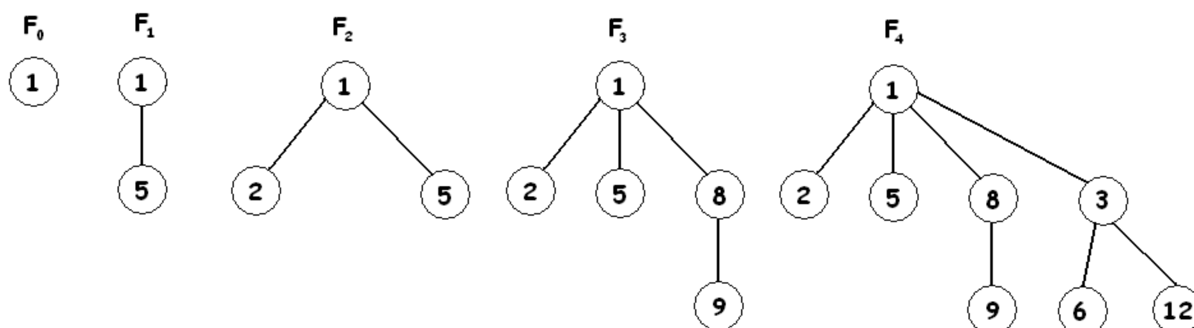


Fibonacciho halda

zdroj: http://cs.wikipedia.org/wiki/Fibonacciho_halda

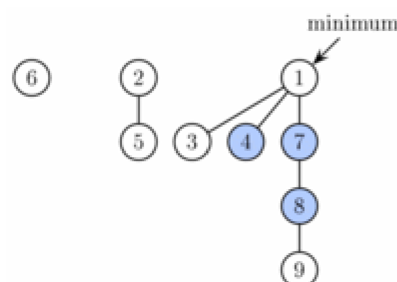
- principiálně vychází z binomiální haldy, je jí velmi podobná
- kořeny stromů jsou cyklicky zřetězené
- FH má odkaz na strom, obsahující MIN (nebo MAX), binom. halda má na strom s nejnižším stupněm, MIN (MAX) je v kořeni
- můžou se opakovat stromy stejného stupně
- operace vložení, hledání minima, snížení hodnoty klíče a spojování stromů probíhají v konstantním čase, amortizovaně O(1)
- operace mazání a mazání minimálního prvku pracuje s časovou složitostí O(log n), přičemž k výraznému zrychlení výpočtů oproti binomiální haldě dochází zejména v momentě, kdy některá z větví stromu neobsahuje žádná data.

- mezi nejčastější aplikace Fibonacciho haldy patří Jarníkův a Dijkstrův algoritmus, které slouží k vyhledávání minimální kostry grafu a k určení nejkratší cesty v grafu.
- označení Fibonacciho halda vychází z Fibonacciho čísel, která mají souvislost s počtem vrcholů v každém stromě.



Počty vrcholů stromů F0, F1, … tvoří Fibonacciho posloupnost

Struktura Fibonacciho haldy



Na obr. - příklad Fibonacciho haldy, která je tvořena třemi stromy stupňů 0, 1 a 3. Tři prvky jsou zvýrazněny (modrou barvou). Potence haldy je 9.

Fibonacciho haldu tvoří

- skupina stromů vyhovující lokální podmínce na uspořádání haldy
- podmínka vyžaduje, aby pro každý uzel stromu platilo, že prvek, který reprezentuje, je menší než prvek reprezentovaný jeho potomky
- z této podmínky vyplývá, že MIN prvkem je vždy kořen jednoho ze stromů
- vnitřní struktura Fibonacciho haldy je v porovnání s binomiální haldou daleko více flexibilní.
- jednotlivé stromy nemají pevně daný tvar a v extrémním případě může každý prvek haldy tvořit izolovaný strom nebo naopak všechny prvky mohou být součástí jediného stromu hloubky *N*.
- tato flexibilní struktura umožňuje velmi jednoduchou implementaci operací s haldou
- operace, které nejsou potřebné, odkládáme a vykonáváme je až v okamžiku, kdy je to nevyhnutelné, například spojení nebo vložení nového prvku se jednoduše provede spojením kořenových seznamů (s konstantní náročností) a jednotlivé stromy spojíme až při operaci snížení hodnoty klíče.
- obecně lze říci, že stupeň uzlu (zde je stupeň myšlen jako počet synů prvku) je velmi nízký: každý uzel má stupeň nejvýše *log N* a velikost podstromu vycházejícího z kořenového uzlu stupně K je nejméně F_{K+2}, kde F_K je K-té Fibonacciho číslo
- toho je dosaženo díky pravidlu, které dovoluje oříznout nejvýše jednoho syna od každého nekořenového prvku
- pokud je odříznut druhý syn, uzel musí být odříznut od svého otce a stává se kořenem nového stromu
- počet stromů je snižován při operaci odstranění prvku s nejnižší hodnotou klíče, kdy dochází ke spojování stromů.

Nejhorší případ stromu stupně ***d***, tj. nejmenší a tedy i nejméně košatý strom, jaký je povolen, se konstruuje složením nejmenších stromů stupně ***d - 1*** a ***d - 2***.
Počet vrcholů v nejmenším stromu stupně ***d*** je $F_d = F_{d-1}+F_{d-2}$.
Formulka je stejná jako při výpočtu Fibonacciho čísel, proto se této haldě říká Fibonacciho halda.

Fibonacciho halda realizuje operace
- MIN
- INSERT
- DECREASE KEY
- INCRESE KEY

v amortizovaném čase O(1)

a operace
- DELETE MIN
- DELETE

v amortizovaném čase O(log n).

Implementace této haldy je podstatně složitější a konstanty před časovými složitostmi jednotlivých operací jsou poměrně vysoké. Na druhou stranu použitím Fibonacciho haldy můžeme dosáhnout podstatně lepších asymptotických časových složitostí.

Vkládání

- vloží se nový prvek (uzel) a víc není nutno řešit
- pokud je nový prvek MIN, přepojí se na něj "pointer haldy"

Mazání

- z kořene
  - kořen smažeme
  - jeho syny vložíme do seznamu, tzn. vytvoří kořenové prvky nových stromů
  - provedeme „konsolidaci“ = spojíme 2 stromy stejného stupně (u binom. H se děje při vkládání)
  - nakonec se najde nové MIN, na které směřuje ukazatel haldy
- z uzlu
  - uzel s podstromem vložíme do seznamu, tím se z něj stane kořen
  - pak smažeme jako kořen
  - výjimka – „trhání ručiček“ u rodiče – syna posuneme do seznamu, až když má pryč obě ručičky

Implementace binomální haldy

```
* Binomialni halda
* Radi prvky dle priority (mensi == vyssi priorita)
public class BinomialHeap<ENTITY extends Comparable> {
     private Node<ENTITY>[] nodes;
     private Node<ENTITY> min;

* Konstruktor
* @param capacity kapacita haldy
public BinomialHeap(int capacity) {
     min = null;
     nodes = new Node[((int) (Math.log(capacity) / Math.log(2))) + 2];
}

* Vlozi prvek do haldy, pokud je mensi nez aktualni minimalni, tak jej
ulozi jako nejmensi prvek
* @param e
public void insert(ENTITY e) {
     Node<ENTITY> n = new Node<ENTITY>(e);
     if (nodes[0] != null) merge(n, nodes[0]);
     else nodes[0] = n;

     if (min == null) min = n;
     else if (min.value.compareTo(n.value) == 1) min = n;
     }

* Smaze a vrati entitu s nejvyssi prioritou
* @return entita s nejvyssi prioritou, @null, pokud je halda prazdna
public ENTITY returnTop() {
     if(min == null) return null;
     ENTITY tmp = min.value;
     nodes[min.order] = null; //strom vyjmeme
     for (Node n : min.children) { //a z potomku udelame nove stromu
          n.parent = null;
          if(nodes[n.order] != null) merge(n, nodes[n.order]);
          else nodes[n.order] = n;
     }
     min.children.clear();
     ENTITY minVal = null;
```

```
    Node minNode = null;
    for(int i = 0; i < nodes.length; i++){
        if(nodes[i] != null){
            if(minVal == null){
                minVal = nodes[i].value;
                minNode = nodes[i];
            }
            else if(minVal.compareTo(nodes[i].value) == 1){
                minVal = nodes[i].value;
                minNode = nodes[i];
            }
        }
    }
    min = minNode;
    return tmp;
}
```

*** Slouci haldy, pokud mergovana halda obsahuje mensi prvek, nez halda, na ktere je volana operace, pak je tento prvek minimalni i ve sloucene halde**
*** @param heap**

```
public void mergeHeaps(BinomialHeap<ENTITY> heap) {
    Node<ENTITY> carry = null;
    for (int i = 0; i < heap.nodes.length; i++) {
        if(nodes[i] == null){
            if(heap.nodes[i] == null){
                nodes[i] = carry;
                carry = null;
            }else{
                if(carry == null){
                    nodes[i] = heap.nodes[i];
                }else{
                    carry = mergeTrees(heap.nodes[i], carry);
                }
            }
            }else{
                if(heap.nodes[i] == null){
                    if(carry != null){
                        carry = mergeTrees(nodes[i], carry);
                        nodes[i] = null;
                    }
                }else{
                    if(carry == null){
                        carry = mergeTrees(nodes[i], heap.nodes[i]);
                        nodes[i] = null;
                    }else{
                        carry = mergeTrees(carry, heap.nodes[i]);
                    }
            }
        }
    }
    if(carry != null) throw new RuntimeException("Preteceni haldy (halda
    je preplnena)");

    if (this.min == null) this.min = heap.min;
    else if(this.min != null && heap.min != null &&
    heap.min.value.compareTo(min.value) == -1) min = heap.min;
    }
```

```
@Override
public String toString() {
     StringBuilder builder = new StringBuilder();
     for(int i = 0; i < nodes.length; i++){
          if(nodes[i] == null) builder.append(i + ": null\n");
          else builder.append(i + ":\n" + nodes[i].toString() + "\n");
          }
          return builder.toString();
     }

* Provede slouceni binomialnich stromu (vcetne preteceni do vyssich radu)
* @param a
* @param b
private void merge(Node a, Node b) {
     if (a.order != b.order)
          throw new IllegalArgumentException("Stromy nejsou stejneho radu");
          int tmpOrder = a.order;
          nodes[tmpOrder] = null;
          Node newRoot = null;
          newRoot = mergeTrees(a, b);
     if (nodes[tmpOrder + 1] == null) nodes[tmpOrder + 1] = newRoot;
     else merge(newRoot, nodes[tmpOrder + 1]);
}

* Slouci binomialni stromy v jeden (zavesi strom s nizsi prioritou pod strom s vyssi prioritou)
* @param a strom a
* @param b strom b
* @return
private Node mergeTrees(Node a, Node b) {
     Node newRoot = null;
     if (a.value.compareTo(b.value) < 0) {
          b.parent = a;
          a.children.add(b);
          a.order++;
          newRoot = a;
     } else {
          a.parent = b;
          b.children.add(a);
          b.order++;
          newRoot = b;}
     return newRoot;
}

* Reprezentuje uzel binomialni haldy
* @param <ENTITY>
private class Node<ENTITY extends Comparable> {
     Node<ENTITY> parent;
     ENTITY value;
     List<Node> children;
     int order;               //rad binomialni haldy

public Node(ENTITY value) {
     this.value = value;
     children = new ArrayList<Node>();
     order = 0;}
```