REKURENTNÍ ROVNICE
(= diferenční)

PŘ Fibonačiho posloupnost

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n), \quad F(0) = 0, \quad F(1) = 1$$

(= znám-li dva členy posloupnosti a vztah mezi nimi, znám i třetí)

- znám rekurentní vztah

chci nerekurzivní, přímý výpočet $F(n) = \text{fce } n$

posloupnost $\{F(n)\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 \dots\}$

~~Toto je rekurentní~~

Toto je rekurentní rovnice

$$F(n+2) - F(n+1) - F(n) = 0 \qquad F(0) = 0, \; F(1) = 1$$

- 2. řádu (= posun o 2)
- lineární s konstantními koef.
- homogenní
- s počátečními podm. (tj. jsou 2 = řád)

charakteristický polynom ..... λ

$\lambda^2 - \lambda - 1^{=\lambda^0} = 0$

hledám kořeny

$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

FS = fundamentální systém

$\lambda_1^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$\lambda_2^n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

zk., že to řeší rovnici

$\lambda_1^{n+2} - \lambda_1^{n+1} - \lambda_1^n = 0 \quad /: \lambda_1^n$

$\lambda_1^n - \lambda_1^1 - \lambda_1^0 = 0$

$\lambda_1^n - \lambda_1 - 1 = 0$ $\underline{\underline{\text{ANO}}}$ protože mám char. polyn.

Obecné řešení homogenní rovnice (komb. FS)

$F(n) = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

poč. podm.: $F(0) = \alpha.1 + \beta.1 = 0 \rightarrow \alpha = -\beta$

$F(1) = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1$

$\Rightarrow -\beta\sqrt{5} = 1$

$\beta = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right), \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Přímý vzorec pro n-tý člen Fibon. posl.

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \text{ pro } n \geq 0$$

Rekurentní rovnice

- lineární s konst. koeficienty a kvazipolynomiální pravou stranou

řádu k: $c_k X(n+k) + c_{k-1} X(n+k-1) + \dots c_1 X(n+1) +$

$$+ c_0 X(n) = P(n) \cdot r^n$$

$P(n)$ … polynom v prom. n

$r \in \mathbb{R}$

s poč. podm. $X(n_0) =$

$X(n_0+1) =$

$X(n_0+k-1) =$

k podm.

(A) řešíme zvlášť homogen. ~~rov~~ rov.

- všechna řešení tvoří podprostor báze = fundamentální systém

je λ_i kořen s-násobný charakt. polynom

$$c_k \lambda^k + \dots + c_1 \lambda^1 + c_0 = 0$$

tak k nÍ vytvoříme s posloupnost do FS

$$\underbrace{\lambda_i^n, n \cdot \lambda_i^n, n^2 \cdot \lambda_i^n, \dots n^{s-1} \lambda_i^n}_{s}$$

Platí: rovnice řádu k má ve FS k posloupn.

② pak najdeme partikul. řeš. nehom. rov.

Metoda odhadu

- lze najít řešení ve tvaru podobném pr. straně

$$x_p(n) = Q(n) \cdot r^n \cdot n^s$$

neznámý pol.

stupně Q = st. P

pokud $r = \lambda$, s-násobný kořen, tak násobíme s n-kou

princip „superpozice"

odpovídá pravá strana $\left(P(n) \cdot r^n\right)$

- obecné řešení

$$x(n) = \underbrace{\alpha_1 F_1(n) + \dots + \alpha_k F_k(n)}_{\text{komb. FS}} + F_p(n)$$

- nakonec - dosadit poč. podm. $\Rightarrow \alpha_1 = \dots \alpha_k =$

PŘ $x(n+2) - 4x(n+1) + 4x(n) = 2^n + n(\cdot 1^n)$

poč. podm. $x(0) = 0$

$x(1) = \frac{1}{4}$

přidáním se nic nezmění

homogen. rov.

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$(\lambda - 2)^2 = 0$

$\lambda_{1,2} = 2$

FS $2^n, n \cdot 2^n$

$x_0 = \alpha 2^n + \beta n 2^n$

partikul. řešení – superpozice

pro $1 \cdot 2^n$ $\quad x_{p_1} = a \cdot 2^n \cdot n^2$

protože 2 je 2-násobný kořen

z toho důvodu nemůže

být n^2

dosadíme do rovnice $\ldots\ldots = 2^n$

$a \cdot 2^{n+2}(n+2)^2 - 4a \cdot 2^{n+1}(n+1)^2 + 4a \cdot 2^n n^2 = 2^n \quad / : 2^n$

$a \cdot \underset{2^2}{4}(n^2+4n+4) - 4a \cdot \underset{2^1}{2}(n^2+2n+1) + 4an^2 = 1$

$n^2: \quad 4a - 8a + 4a = 0$

$n: \quad 16a - 16a = 0$

$1: \quad 16a - 8a = 1$

$a = \frac{1}{8}$

$X_{p_1} = \frac{1}{8} 2^n \cdot n^2$

pokud by to nemělo řešení, pak je někde chyba, na něco se zapomnělo.

$X_{p_2} = (bn + c) \cdot 1^n \cdot \cancel{n^0}$ pro $(1n + 0)$

1 není kořen (je to 2)

dosadíme do $\ldots = n$

$$\big(b(n+2)+c\big) + 4\big(b(n+1)+c\big) + 4\big(bn+c\big) = n$$

$n: \; b - 4b + 4b = 1 \rightarrow b = 1$

$1: \; 2b + c - 4b - \cancel{4c} + \cancel{4c} = 0 \rightarrow c = 2$

$x_{p_2} = 1n + 2$

<u>obecné řešení</u>

$x(n) = x_0 + x_{p_1} + x_{p_2}$

$x(n) = \alpha 2^n + \beta n 2^n + \frac{1}{8} 2^n n^2 + n + 2$

poč. podm. $x(0) = \ldots = 0$

$x(1) = \ldots = \frac{1}{4}$

$\alpha = -2, \; \beta = \frac{1}{2}$

Odvození vzorce pro součet řady.

(Př) Odvoďte vzorec pro součet řady

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n} k(k+1).$$

Rekurentní vztah

$$S(n) = \sum^{n} = \sum^{n-1} + \underset{(k=n)}{n(n+1)} = S(n-1) + n(n+1)$$

rekurentní rovnice 1. řádu

$$S(n) - S(n-1) = n^2 + n$$

vyžaduje 1 podmínku - např. $k=0$

$$S(0) = \sum_{k=0}^{0} k.(k+1) = 0.1 = 0$$

Řešení rekurent. rov.

homogenní rov. $S(n) - S(n-1) = 0$

polynom $\lambda - 1 = 0$ (subst. $m = n-1$)

kořen $\lambda_1 = 1$

FS (fundamentální systém) FS 1^n

$$\cancel{S(0)}$$
$$S_0(n) = \alpha . 1^n = \alpha$$

partikulární řešení (odhadem S_p)

$$S_p(n) = (an^2 + bn + c).\ 1^n.\ n^1$$

1 je kořen, a to 1-násobný

$= an^3 + bn^2 + cn$ a dosadím do pův. nehomog. rov.

$$\underbrace{\left(an^3 + bn^2 + cn\right)}_{S(n)} - \underbrace{\left(a(n-1)^3 + b(n-1)^2 + c(n-1)\right)}_{S(n-1)} = n^2 + n$$

$\cancel{= n^2 +}$

n^3

n^2

n

1

$$a = \frac{1}{3}, \quad b = 1, \quad c = \frac{2}{3}$$

$$S_p(n) = \frac{1}{3}n^3 + n^2 + \frac{2}{3}n = \dots = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

obecné řešení: $S(n) = S_0 + S_p$

$$= \alpha + \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

počát. podm.

$$S(0) = \alpha + 0 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

Vzorec pro součet řady

$$S(n) = \sum_0^n k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

Rekurzivní algoritmy - poznámka

dokázat totální korektnost rek. alg.

dokazuje se math. indukcí }

→ vždy se zastaví (terminace)

→ když zastaví, dá správný výsledek (parciální korektnost)

časová náročnost - rekurentní rovnice

I. když algorit. dělí úlohu na části

$$\text{např.} \quad \underset{\text{počet operací}}{T(n)} = \underbrace{2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + n}$$

toto není rekurentní rovnice, protože se dělí a není „n-1"

nutno převést vhodnou substitucí

např. $n = 2^k$

$$T(2^k) = 2 \cdot T(2^{k-1}) + 2^k$$

označím $T(2^k) = t(k)$

$$t(k) = \underbrace{2 \cdot t(k-1) + 2^k}$$

toto již je rekurentní rovnice

výsledek $t(k) = \underbrace{\alpha \cdot 2^k}_{t_0} + \underbrace{k \cdot 2^k}_{t_p}$

α z počát. podm.

zpětná substituce $2^k = n \Rightarrow k = \log_2 n$

$$T(n) = \alpha \cdot n + n \cdot \log_2 n$$

čas. náročnost je $O(n \cdot \log_2 n)$