MATEMATICKÁ INDUKCE

= způsob, jak něco dokazovat

PRINCIP

① slabé indukce

V = vlastnost pro přirozená čísla

Jestliže 1) n_0 má vlastnost V

2) kdyby n mělo vlastnost V, pak by i $(n+1)$ mělo vlast. V

pak všechna $n \geq n_0$ mají vlastnost V.

jazykem ~~mat~~ predikát. logiky

V „PL"

$$\left[V(n_0) \wedge \forall n \left(V(n) \Rightarrow V(n+1)\right)\right] \Rightarrow \left(\forall n \geq n_0 \; V(n)\right)$$

$\rightarrow$ = „základní krok"

$\rightarrow$ = „indukční krok" - je to implikace

indukční předpoklad $\Rightarrow$ indukční závěr

Pro nepravdivost. předpoklad je implikace pravdivá. Tedy každá nesmyslná vlastnost splňuje 2)

PŘ Dokažte: $(1+x)^n \geq 1+nx$ pro všechna $x \geq 0 \in \mathbb{R}_0^+$
pro všechna $n \geq 1 \in \mathbb{N}$

bude se dělat indukce dle „n" = slabá ind. dle n
=> nerovnost platí na všech $\mathbb{R}^+$

1) $n=1$ $\quad (1+x)^1 \geq 1+1.x \quad \forall x \geq 0$
rovnost platí

2) indukční předpoklad ~~(=IP)~~ ~~(=i.p.)~~ (= IP)
pro libovolné $n \geq 1$ platí $\underbrace{(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall x \geq 0}_{V(n)}$

indukční závěr = chci dokázat, že platí i pro $V(n+1)$
chci dokázat $\underbrace{(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x \text{ pro } \forall x \geq 0}_{V(n+1)}$

$\uparrow \quad \downarrow$
$\uparrow \quad \downarrow$
$\uparrow \quad \downarrow$
$\uparrow \quad \downarrow$
$\uparrow \quad 1 \geq 0$ => ANO, ale nutno
ověřit, že výrazy jsou ekvivalentní, tzn.
platí to i opačně

Raději nekonstruovat nerovnosti, ALE lepší je
$L = \ldots \geq \ldots \geq \ldots P$
z leva ..... do prava

$L = (1+x)^{n+1} = (1+x)^n (1+x)^1 \underset{IP}{\geq} (1+nx)(1+x) = \%$

dekompozice problému velikosti $n+1$
na problém velikosti n a zbytek

$\%$. $(1+x) \geq 0$ (neboť $x \geq 0$) -> neotočí se
nerovnost

$$= 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x = P$$
$$nx^2 \geq 0 \qquad \text{pro } \forall x \geq 0$$

Princip slabé indukce pro všechna $n \geq 1$ platí $V(n)$.

(PŘ) Dokažte: $(3^n + 4^n - 2)$ je dělitelné 8 pro $\forall n \geq 1$ slabou indukcí

1) pro $n = 1$: $3^1 + 4^1 - 2 = 8$ => je dělitelné 8

2) IP pro libovolné pevně zvolené n.

$3^n + 4^n - 2 = 8k, \; k \in \mathbb{N}$

chci dokázat $3^{n+1} + 4^{n+1} - 2 = 8 \cdot l, \; l \in \mathbb{N}$

$$3^{n+1} + 4^{n+1} - 2 = 3^1 \cdot 3^n + \underbrace{4^1}_{3+4} \cdot 4^n - 2 \underset{\text{je dekomponováno}}{=} 3(3^n + 4^n - 2) + 4 \cdot 4^n + 4 \underset{IP}{=}$$

$$= 3 \cdot 8k + 4 \cdot \underbrace{(4^n + 1)}_{\text{sudé číslo } \leftarrow 4 \cdot 4 \cdot 4 \ldots +1} = 8(3k + s)$$

=> lze zapsat jako $2s$

↳ slabá ind. $3^n + 4^n - 2 = 8k$, pro $\forall n \geq 1$

správný zápis je „pro $\forall n \geq 1$, $\exists k \in \mathbb{N}$: $3^n + 4^n - 2 = 8k$"

PRINCIP

(2) silné indukce

Jestliže 1) n_0 má vlastnost V

2) jestliže pro všechna k, $n_0 \le k \le n$, platí vlastnost V, pak také pro $n+1$ platí vlastnost V

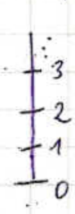
pak pro $n \ge n_0$ platí vlastnost V

Tvrzení: Na modelu přirozených čísel jsou následující principy ekvivalentní

- princip slabé indukce
- princip silné indukce
- princip dobrého uspořádání (= každá podmnožina ~~na~~ v $\mathbb{N}$ má nejmenší prvek

Důkaz: viz skripta

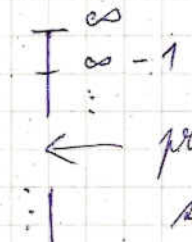
Standardní model $\mathbb{N}$



$0 \in \mathbb{N}$

když $n \in \mathbb{N}$, pak $n+1 \in \mathbb{N}$, jiná čísla v $\mathbb{N}$ nejsou

nestandardní model $\mathbb{N}$



propast, přes kterou se nějaká vlastnost nepřenese, tedy může platit 1) i 2) pro indukci, ale nebude platit závěr

Kdy použít silnou indukci?

- pokud lze dekomponovat na nějakou menší úlohu, ale ne o 1 menší úlohu