7 Pologrupy, monoidy, grupy

1. Množina A se skládá ze všech vzájemně jednoznačných zobrazení $f\colon \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$. Napište tabulku monoidu $(A,\circ)$, kde $\circ$ je skládání zobrazení, a rozhodněte, zda se jedná o pologrupu, monoid či grupu. Je operace $\circ$ komutativní?

2. Na množině R reálných čísel je definována relace $*$ předpisem $x * y = x + y + x^2y$. Dokažte, že operace $*$ má neutrální prvek, má všechny pravé inverzní prvky, ale nemá všechny levé inverzní prvky.

3. Označme M množinu všech čtvercových matic

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

kde a, b jsou celá čísla. Ukažte, že M spolu s násobením matic tvoří grupoid. Je M monoid? (Asociativitu maticového násobení ověřovat nemusíte.) Které prvky z M mají inverzní prvek v M?

POČET STRAN: 1+4

PODPIS: Jandová

DATUM: 21.5. 2011

Zpracovala: **Radoslava Jandová, jandora1**

Obor: **STM, softwarové inženýrství**
Semestr: **4. semestr, léto 2010/2011**

7 POLOGRUPY, MONOIDY, GRUPY

7.1. Množina A se skládá ze všech vzájemně jednoznačných zobrazení $f: \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$.
Napište tabulku monoidu $(A, \circ)$, kde $\circ$ je skládání zobrazení, a rozhodněte, zda se jedná o pologrupu, monoid či grupu.
Je operace $\circ$ komutativní?

$$A = \{ f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\} \}$$

monoid $(A, \circ)$

definice ~~operace~~ relace $*$: $(\cancel{f} * g)_{(x)} = (f \circ g)_{(x)} = f(g(x))$

Prvky množiny A:

id: $1 \to 1$, $2 \to 2$, $3 \to 3$

f_1: $1 \to 1$, $2 \to 3$, $3 \to 2$

f_2: $1 \to 2$, $2 \to 1$, $3 \to 3$

f_3: $1 \to 3$, $2 \to 2$, $3 \to 1$

f_4: $1 \to 2$, $2 \to 3$, $3 \to 1$

f_5: $1 \to 3$, $2 \to 1$, $3 \to 2$

Zpracovala: **Radoslava Jandová, jandora1**

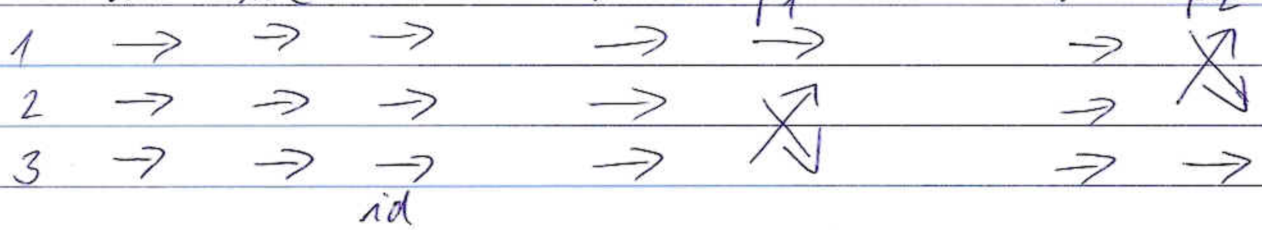
Obor: **STM, softwarové inženýrství**
Semestr: **4. semestr, léto 2010/2011**

2

Tabulka monoidu $(A, \circ)$

$\rightarrow g$, $\downarrow f$

$*$	id	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
id	id	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1	id	f_5	f_4	f_3	f_2
f_2	f_2	f_4	id	f_5	f_1	f_3
f_3	f_3	f_5	f_4	id	f_2	f_1
f_4	f_4	f_2	f_3	f_1	f_5	id
f_5	f_5	f_3	f_1	f_2	id	f_4



atd. – pomocné výpočty ~~funkce~~ relace $*$ zde nebudu uvádět v celém rozsahu

asociativita – ANO, platí ($\circ$ je vždy asociat.)
neutrál – ANO = id
inverze – ANO
komutativita – NE
$\rightarrow$ monoid $(A, \circ)$ je grupa (nekomutat.)
Operace $\circ$ není vždy komutativní.

Zpracovala: **Radoslava Jandová, jandora1**

Obor: **STM, softwarové inženýrství**
Semestr: **4. semestr, léto 2010/2011**

3

(4.2.) Na množině $\mathbb{R}$ je definována relace $*$ předpisem $x * y = x + y + x^2 y$.
Dokažte, že $*$ má neutrální prvek, má všechny pravé inverzní prvky, ale nemá všechny levé inverzní prvky.

Neutrální prvek: $\exists e \forall a,\ e \in \mathbb{R}$
platí $a * e = a = e * a$

L stranu rovnice přepíšu dle definice $*$

$x * y = a * e \Rightarrow a + e + a^2 e$

$a + e + a^2 e = a$

$e + a^2 e = 0$

$e(1 + a^2) = 0 \longrightarrow$ platí, pokud $e = 0$

ověřím, zda platí také $0 * a = a$

$0 * a = a \Rightarrow 0 + a + 0^2 a = a$

$a = a$

Platí i P strana rovnosti $\Rightarrow 0$ je neutrální prvek relace $*$.

(~~pon~~) Má relace $*$ všechny P inverzní prvky?

relace $*$ má všechny inverze, pokud $\forall a \exists a^{-1},\ a, a^{-1} \in \mathbb{R}$, pak platí
$a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$

Pokud má relace všechny P inverzní prvky, pak musí platit

$e = a^{-1} * a$

Zpracovala: **Radoslava Jandová, jandora1**

Obor: **STM, softwarové inženýrství**
Semestr: **4. semestr, léto 2010/2011**

(4)

dosadím do L strany rovnice

$$a * a^{-1} = e \rightarrow a + a^{-1} + a^2 a^{-1} = 0$$
$$a^{-1} + a^2 a^{-1} = -a$$
$$a^{-1}(1 + a^2) = -a$$
$$a^{-1} = -\frac{a}{1+a^2}$$

pokud $a \in \mathbb{R}$, pak $(1+a^2) > 0$
$\rightarrow$ platí, že $\forall a \; \exists a^{-1}$, $a \in \mathbb{R}$
a existuje pouze jednoznačné řešení.

Relace $*$ má všechny pravé inverzní prvky.

Ověřte, že relace $*$ nemá všechny L inverzní prvky.

dosadím do P strany rovnice

$$e = a^{-1} * a \rightarrow 0 = a^{-1} + a + (a^{-1})^2 \cdot a$$

řeším kvadratickou rovnici $ax^2 + bx + c = 0$
$\rightarrow (a^{-1})^2 \cdot a + a^{-1} + a = 0$
a hledám, kdy nemá řešení, tzn.
diskriminant < 0

$D = b^2 - 4ac \rightarrow 1^2 - 4 \cdot a \cdot a = 1 - 4a^2$
pokud $a \in \mathbb{R} \rightarrow D = -3$ pro $a = 1$,
$\rightarrow$ pro $a = 1$ nemá rovnice řešení
$\rightarrow$ relace nemá všechny levé inverzní prvky.

AD7B01MCS - Matematika pro informatiky
Domácí úlohy pro kombinované studium 2010/2011

Zpracovala: **Radoslava Jandová, jandora1**

Obor: **STM, softwarové inženýrství**
Semestr: **4. semestr, léto 2010/2011**

5

4.3 Označme M množinu všech čtvercových matic $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, kde a, b jsou celá čísla.
Ukažte, že M spolu s násobením matic tvoří grupoid.
Je M monoid?
(Asociativitu maticového násobení ověřovat nemusíte.)
Které prvky z M mají inverzní prvek v M?

M = množina □ matic $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

$a, b \in \mathbb{Z}$

definice relace $*$: $x * y$, $x, y \in M$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}$$

grupoid $(M, *)$ – musím prokázat, že výsledná matice z operace $x * y$ leží v M

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -bc - ad & -bd + ac \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} ac - bd = s \\ ad + bc = t \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} s & t \\ -t & s \end{pmatrix} \in M$$

AD7B01MCS - Matematika pro informatiky
Domácí úlohy pro kombinované studium 2010/2011

Zpracovala: **Radoslava Jandová, jandora1**

Obor: **STM, softwarové inženýrství**
Semestr: **4. semestr, léto 2010/2011**

6

Je M monoid?
Monoid = grupoid, kde je relace $*$ asociativní a má neutrální prvek

Na základě zadání asociativitu násobení neověřuji → hledám pouze neutrální prvek, tzn. $\exists e \forall a, a \in M$, platí $a * e = a = e * a$

Předpoklad: pro matice je neutrálním prvkem jednotková matice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ověřím tedy platnost dle definice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a-0 & 0+b \\ -b-0 & 0+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-0 & b+0 \\ -0-b & -0+a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

pro M platí, že $\exists e \forall a, a \in M$, tzn. M je monoid.

AD7B01MCS - Matematika pro informatiky
Domácí úlohy pro kombinované studium 2010/2011

Zpracovala: **Radoslava Jandová, jandora1**

Obor: **STM, softwarové inženýrství**
Semestr: **4. semestr, léto 2010/2011**

4/4

Které prvky M mají inverzní prvek v M?

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}(a) = a$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2}(+b) = -b$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1}(-b) = b$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2}(a) = a$$

$$A^{-1} = \det A^{-1} \cdot D^T$$
$$A^{-1} = (a^2+b^2)^{-1}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & -\frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$$

v $\mathbb{Z}$ pak existují pouze tato řešení

1) $a = 1 \quad b = 0$
2) $a = 0 \quad b = 1$
3) $a = 0 \quad b = -1$
4) $a = -1 \quad b = 0$

→ inverzní prvek má pouze tyto prvky

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$