5 Lineární algebra nad $\mathbb{Z}_n$

1. V $\mathbb{Z}_7$ řešte soustavu s parametrem a:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & + & y & + & 2z & + & 4u & = & 2 \\ 5x & + & 4y & + & z & + & 3u & = & 3 \\ x & + & 5y & + & 3z & & & = & a \end{array}$$

2. V $\mathbb{Z}_6$ je dána matice

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 2 \\ 1 & t+2 \end{pmatrix}.$$

   Najděte všechny hodnoty parametru t, pro které existuje A_t^{-1}, a příslušné inverzní matice vypočtěte.

3. Je dána generující matice G lineárního kódu nad $\mathbb{Z}_5$. Najděte nějakou kontrolní matici H tohoto kódu a pomocí ní ověřte, zda bylo slovo $v = (2\,2\,1\,1\,3)$ přijato bez chyb. Pokud to jde, tak případnou chybu opravte (předpokládáme, že nedošlo více než k jedné chybě).

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

5 LINEÁRNÍ ALGEBRA NAD $\mathbb{Z}_n$

5.1. V $\mathbb{Z}_7$ řešte soustavu soustavu s parametrem a:

$$\begin{aligned} 3x + y + 2z + 4u &= 2 \\ 5x + 4y + z + 3u &= 3 \\ x + 5y + 3z &= a \end{aligned}$$

Soustavu rovnic přepíšu do matice a upravím dle možností:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 & a \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2a+3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4a+2 \end{array}\right)$$

Nyní dopočítám jednotlivé proměnné:

$$4u = 4a + 2 \quad |\cdot 2$$
$$u = a + 4 \quad \Rightarrow \quad a = u - 4$$

$$3u = 2a + 3$$
$$3u = 2(u-4) + 3$$
$$3u = 2u - 8 + 3 = 2u + 6 + 3$$
$$3u - 2u = 6 + 3$$
$$u = 9 = 2 \quad \longrightarrow \quad a = u - 4$$
$$a = 2 - 4 = 5$$

Zpracovala: **Radoslava Jandová, jandora1**

Obor: **STM, softwarové inženýrství**
Semestr: **4. semestr, léto 2010/2011**

2

Diskuse na $\underline{a}$:

a) $a = 5$

$$x + 5\underset{s}{y} + 3\underset{t}{z} = a \qquad s, t \in \mathbb{Z}_7$$

$$x = a - 5y + 3z$$
$$x = a - 5s - 3t$$
$$x = u - 4 - 5s - 3t$$
$$x = 2 - 4 - 5s - 3t.$$
$$(\cancel{x = 5})$$

$$x = -2 - 5s - 3t$$
$$x = 5 - 5s - 3t = 5 + 2s + 4t$$

$$(x, y, z, u) = (5 + 2s + 4t, s, t, 2); \ t, s \in \mathbb{Z}_7$$

počet řešení $7^2 = 49$

vektor lze rozepsat po složkách - např.

$$(5, 0, 0, 2) + s(2, 1, 0, 0) + t(4, 0, 1, 0)$$

b) $a \neq 5$

Soustava nemá řešení.

AD7B01MCS - Matematika pro informatiky
Domácí úlohy pro kombinované studium 2010/2011

Zpracovala: **Radoslava Jandová, jandora1**

Obor: **STM, softwarové inženýrství**
Semestr: **4. semestr, léto 2010/2011**

3

5.2. V $\mathbb{Z}_6$ je dána matice

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 2 \\ 1 & t+2 \end{pmatrix}$$

Najděte všechny hodnoty t, pro které existuje A_t^{-1}, a příslušné inverzní matice vypočtěte.

Hledám a_t^{-1}, tzn. det a_t musí mít inverzi.

$$\det a_t = t(t+2) - 2 \cdot 1$$
$$= t^2 + 2t - 2$$

Zjistím, pro které hodnoty t má det a_t inverzi v $\mathbb{Z}_6$:

$t = 0 \Rightarrow \det a_0 = -2 = 4 \quad \det a_0^{-1} = \emptyset$
× $t = 1 \Rightarrow \det a_1 = 1 + 2 - 2 = 1 \quad \det a_1^{-1} = 1$
$t = 2 \Rightarrow \det a_2 = 4 + 4 - 2 = 6 \quad \det a_2^{-1} = \emptyset$
× $t = 3 \Rightarrow \det a_3 = 9 + 6 - 2 = 13 \quad \det a_3^{-1} = 1$
$t = 4 \Rightarrow \det a_4 = 16 + 8 - 2 = 22 \quad \det a_4^{-1} = \emptyset$
$t = 5 \Rightarrow \det a_5 = 25 + 10 - 2 = 33 \quad \det a_5^{-1} = \emptyset$

Z výše uvedených výpočtů vyplývá, že budu hledat a_t^{-1} pro $t = 1$ a $t = 3$.

Zpracovala: **Radoslava Jandová, jandora1**
Obor: **STM, softwarové inženýrství**
Semestr: **4. semestr, léto 2010/2011**

4

Co potřebuji vědět: $a_k^{-1} = \det a_k^{-1} \cdot D^T$

$a_k \cdot a_k^{-1} = E$

D = matice doplňků

D^T = transponovaná D

E = jednotková matice

$$D = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

výpočet $D = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 3 = 3$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 1 = -1$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1$$

$$D^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nyní dosadím hodnoty pro konkrétní k:

$$a_1^{-1} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ v } \mathbb{Z}_6$$

Zkouška: $a_1 \cdot a_1^{-1} = E$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3 + 2.5) & (4+2) \\ (3 + 3.5) & (4+3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 6 \\ 18 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

OK

AD7B01MCS - Matematika pro informatiky
Domácí úlohy pro kombinované studium 2010/2011

Zpracovala: **Radoslava Jandová, jandora1**

Obor: **STM, softwarové inženýrství**
Semestr: **4. semestr, léto 2010/2011**

5

$$a_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 5 = 1 \cdot 5 = 5$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 1 = -1$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 3 = 3$$

$$D^T = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$a_3^{-1} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Zkouška: $a_3 \cdot a_3^{-1} = E$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (15+10) & (12+6) \\ (5+25) & (4+15) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 18 \\ 30 & 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

OK

6

5.3. Je dána generující matice G lineárního kódu nad Z_5. Najděte nějakou kontrolní matici H tohoto kódu a pomocí ní ověřte, zda bylo slovo $v = (22113)$ přijato bez chyb. Pokud to jde, tak případnou chybu opravte (předpokládáme, že nedošlo více než k jedné chybě).

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

hodnost matice = 2

V řádcích hledané matice H budou prvky fundam. syst. homogenní rovnice

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Počet prvků FS : $5 - 2 = 3 \Rightarrow$ lin. rovnice bude mít 3 řádky a prvky rovnice musí být lin. nezávislé.
Sestavím vektory pro rovnice

$(a_1, a_2, 1, 0, 0)$
$(b_1, b_2, 0, 1, 0)$
$(c_1, c_2, 0, 0, 1)$

a dosazením vektorů do matice najdu jednotlivé proměnné $a_1, a_2 \dots c_2$.

AD7B01MCS - Matematika pro informatiky
Domácí úlohy pro kombinované studium 2010/2011

Zpracovala: **Radoslava Jandová, jandora1**

Obor: **STM, softwarové inženýrství**
Semestr: **4. semestr, léto 2010/2011**

7

$a_2: \quad 0 + 2a_2 + 1 + 0 + 0 = 0$

$2a_2 = -1 \rightarrow 2a_2 = 4 \; /\cdot 3$

$a_2 = 12 = 2$ v $\mathbb{Z}_5$

$a_1: \quad 2a_1 + 2 + 0 + 0 + 0 = 0$

$2a_1 = -2 = 3 \; /\cdot 3$

$a_1 = 9 = 4$ v $\mathbb{Z}_5$

$(a_1, a_2, 1, 0, 0) = (4, 2, 1, 0, 0)$

$b_2: \quad 0 + 2b_2 + 0 + 1 + 0 = 0$

$2b_2 = -1 = 4 \; /\cdot 3$

$b_2 = 12 = 2$

$b_1: \quad 2b_1 + 2 + 0 + 3 + 0 = 0$

$2b_1 = -5 = 0 \rightarrow b_1 = 0$ v $\mathbb{Z}_5$

$(b_1, b_2, 0, 1, 0) = (0, 2, 0, 1, 0)$

$c_2: \quad 0 + 2c_2 + 0 + 0 + 3 = 0$

$2c_2 = -3 = 2 \; /\cdot 3$

$c_2 = 6 = 1$ v $\mathbb{Z}_5$

$c_1: \quad 2c_1 + 1 + 0 + 0 + 0 = 0$

$2c_1 = -1 = 4 \; /\cdot 3$

$c_1 = 12 = 2$ v $\mathbb{Z}_5$

$(c_1, c_2, 0, 0, 1) = (2, 1, 0, 0, 1)$

8

Nyní můžu sestavit matici H

$$H = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a mohu ověřit, zda bylo slovo $\underline{v}$ přijato bez chyb $\rightarrow H \cdot v$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+4+1+0+0 \\ 0+4+0+1+0 \\ 4+2+0+0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ slovo $\underline{v}$ bylo přijato s chybou.

Nyní zkusím odhadnout, ve kterém sloupci je chyba

$$H = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{matrix} ? & \text{NE} & \text{NE} & \text{NE} & \text{NE} \end{matrix}$$

Předpokládám chybu ve sloupci $S_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Podle výsledku $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ je sloupec S_1 $2\times \rightarrow$

ve slově $\underline{v}$ odečtu hodnotu 2 z první pozice.

9

$\underline{r_{opr.}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Zkouška:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+4+1 \\ 0+4+0+1 \\ 0+2+0+0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{OK}}$