2 Rekurentní rovnice

1. Najděte obecné řešení rekurentní rovnice:

$$X(n+3) - 5X(n+2) + 8X(n+1) - 4X(n) = n3^n + 2$$

2. Řešte rekurentní rovnici s počátečními podmínkami:

$$A(n) = -2A(n-1) + 3A(n-2) + 4, \quad A(0) = 1,\ A(1) = 5.$$

3. Odvoďte vzorec pro součet řady $S(n) = \sum_{k=0}^{n} 2^k k^2$.

2 REKURENTNÍ ROVNICE

2.1. Najděte obecné řešení rekurentní rovnice:

$$X(n+3)-5X(n+2)+8X(n+1)-4X(n)=n3^n+2$$

1. Hledám obecné řešení homogenní rovnice

$$\underbrace{X(n+3)}-\underbrace{5X(n+2)}+\underbrace{8X(n+1)}-\underbrace{4X(n)}=0$$

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda^1 - 4\lambda^0 = 0$$

Rovnici jsem si vyjádřila jako polynom a hledám kořeny $\lambda_{1,2,3}$.

λ_1 - zkusím odhadnout prostým dosazením čísel 0, 1, 2, ... Našla jsem $\lambda_1 = 1$.

Nyní mohu polynom vydělit, abych získala polynom 2 stupně, z něhož snadno dopočítám zbylé dva kořeny.

$$\lambda^3-5\lambda^2+8\lambda^1-4 : (\lambda-1) = \underbrace{\lambda^2-4\lambda+4}$$

$$\begin{array}{l}
-\lambda^3+\lambda^2 \\
\hline
0 \ -4\lambda^2+8\lambda \\
\quad +4\lambda^2-4\lambda \\
\hline
\quad 0 \ +4\lambda-4 \\
\qquad -4\lambda+4 \\
\hline
\qquad 0 \quad 0
\end{array}$$

standardním výpočtem z tohoto polynomu získám zbylé dva kořeny: $\lambda_2 = 2$
$\lambda_3 = 2$

Z kořenů rovnice $\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = 2$
$\lambda_3 = 2$ získám posloupnosti
do fundamentálního systému: $n^0 . 1^n = 1^n$
$n^0 . 2^n = 2^n$
$n^1 . 2^n = n . 2^n$

a mám obecné řešení homogenní rovnice
$\underline{\underline{a . 1^n + b . 2^n + c . n . 2^n}}$

2. Hledám partikulární řešení
Pro partikulární řešení potřebuji mít pravou stranu ve tvaru $A^n . P(n)$

konstanta polynom

V příkladu je ale pravá strana ... $= n . 3^n + 2$.
Rozložím si výraz pomocí principu superpozice a budu počítat dvě řešení.

2a) <u>řešení pro $= n . 3^n$</u>

$$X(n+3) - 5X(n+2) + 8X(n+1) - 4X(n) = n . 3^n$$

$P(n)$ A^n

$A^n . P(n) \geq 0$
$A = 3$
P = polynom prvního stupně

Zpracovala: **Radoslava Jandová, jandora1**

Obor: **STM, softwarové inženýrství**
Semestr: **4. semestr, léto 2010/2011**

3

Dosadím do vzorce $n^{\alpha} . A^{n} . P(n)$, $n \geq n_0$.
$A = 3$ není kořenem rovnice $\Rightarrow n^{\alpha} = n_0$
$P(n)$ lze vyjádřit jako $a . n^1 + b . n^0 = an + b$

$$n^0 . 3^n . (an + b) = 3^n . (an + b)$$

Nyní dosadím do původní rovnice s tím, že za X dosadím partikulární řešení $3^n(an + b)$ a za n vždy odpovídající hodnotu $(n + \ldots)$

$$X(n+3) - 5X(n+2) + 8X(n+1) - 4X(n) = n . 3^n$$

$$3^{n+3} . (a(n+3) + b) - 5 . (3^{n+2}(a(n+2) + b)) + 8 . (3^{n+1}(a(n+1) + b)) - 4 . (3^n(an + b)) = n . 3^n$$

obě strany rovnice podělím 3^n

$$3^3(an + 3a + b) - 5 . 3^2(an + 2a + b) + 8 . 3(an + a + b) - 4 . (an + b) = n$$

$$27an + 81a + 27b - 45an - 90a - 45b + 24an + 24a + 24b - 4an - 4b = n$$

$$2an + 15a + 2b = n \qquad (n = 1 . n + 0)$$
$$2an + 15a + 2b = 1 . n + 0$$

z této rovnice dostaneme následující výpočty:

$$2an + 15a + 2b = 1.n + 0$$

$2an = 1.n$

$2a = 1$

$a = \frac{1}{2}$

$15a + 2b = 0$

$\frac{15}{2} + 2b = 0$

$2b = -\frac{15}{2}$

$b = -\frac{15}{4}$

výsledky dosadím do partikulárního odhadu

$$3^n(an+b) \longrightarrow 3^n\left(\frac{n}{2} - \frac{15}{4}\right)$$

2b) řeším pro $= 2$

$$X(n+3) - 5X(n+2) + 8X(n+1) - 4X(n) = 2$$

odhad : $A^n . P(n)$

2 lze rozepsat do tvaru : $1^n . 2$

$1^n \to A^n \to A = 1$

$2 \to P(n) \to$ polynom nultého stupně $= p$

Zpracovala: **Radoslava Jandová, jandora1**

Obor: **STM, softwarové inženýrství**
Semestr: **4. semestr, léto 2010/2011**

5

Nyní dosadím do vzorce $n^d \cdot A^n \cdot P(n)$

$d = 1$, což je kořen λ_1

$\rightarrow n^1 \cdot 1^n \cdot a = n \cdot 1 \cdot a = n \cdot a$

Dosadím do rovnice – za X výraz $n \cdot a$
– za n odpovídající hodnotu $(n+3)$...

$$X(n+3) - 5X(n+2) + 8X(n+1) - 4X(n) = 2$$
$$a(n+3) - 5a(n+2) + 8a(n+1) - 4an = 2$$
$$an + 3a - 5an - 10 + 8an + 8 - 4an = 2$$
$$\underline{\underline{a = 2}}$$

Partikulární řešení rovnice je součet obou částí (2a) + 2b)):

$$\underline{\underline{3^n\left(\frac{n}{2} - \frac{15}{4}\right) + 2}}$$

Obecné řešení rovnice je součet obecného řešení homogenní rovnice a partikulárního řešení rovnice:

$$\underline{\underline{a \cdot 1^n + b \cdot 2^n + c \cdot 2^n + 3^n\left(\frac{n}{2} - \frac{15}{4}\right) + 2}}$$

6

2.2. Řešte rekurentní rovnici s počátečními podmínkami:

$A(n) = -2A(n-1) + 3A(n-2) + 4, \quad A(0) = 1, \; A(1) = 5$

Předpoklad: $n \in \mathbb{N}$

Nejprve upravím rovnici tak, aby výrazy s A byly na jedné straně:

$A(n) + 2A(n-1) - 3A(n-2) = 4$

<u>1. krok</u>: Obecné řešení → budu řešit homogenní rovnici.

$\underbrace{A(n)}_{\lambda^2} + \underbrace{2A(n-1)}_{\lambda^1} - \underbrace{3A(n-2)}_{\lambda^0} = 0$

$\lambda^2 \quad \lambda^1 \quad \lambda^0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda^1 - 3 = 0$

Vypočtu kořeny $\lambda_{1,2}$: $D = 16$

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = -3$

Z toho odvodím dvě posloupnosti do fundamentálního systému: $n^0 . 1^n$

$n^0 . (-3)^n$

Obecné řešení pomocí FS: $\underline{\underline{a . 1^n + b . (-3)^n}}$

2. krok: Partikulární řešení – budu hledat pomocí principu superpozice.

$A(n) + 2A(n-1) - 3A(n-2) = 4$

předpoklad: $4 = A^n \cdot P(n)$, $n \geq n_0$

úvaha: $P(n) = a \Rightarrow a = 4$

$P(n) = 4$

pokud by toto platilo, pak existuje partikulární řešení

$n^d \cdot A^n \cdot P(n)$, $n \geq n_0$

kde d = násobnost konstanty A jako kořene

$\lambda_1 = 1 \Rightarrow A = 1 \Rightarrow n^1 \cdot 1^n \cdot a = n^1 \cdot a = n \cdot a$

dál hledám koeficient $a \Rightarrow n \cdot a$ dosadím do rovnice za $A(n)$

$$n \cdot a + 2a(n-1) - 3a(n-2) = 4$$
$$na + 2an - 2a - 3an + 6a = 4$$
$$4a = 4$$
$$a = 1$$

partikulární řešení: $n \cdot a$, $a = 1$

$n \cdot 1 = n$

nyní sečtu obecné řešení FS a partikulární řešení:

$$\underbrace{a + b(-3)^n}_{FS} + \underbrace{n}_{PŘ}$$

nyní mám a, b a dvě počáteční podmínky

$A(0) = 1 \quad = n$

$A(1) = 5 \quad = n$

sestavím rovnice

$1 = A(0) \rightarrow a + b(-3)^0 + 0 = 1$

$a + b = 1$

$5 = A(1) \rightarrow a + b(-3)^1 + 1 = 5$

$a + b(-3) + 1 = 5$

$a - 3b + 1 = 5$

nyní mohu vypočítat a a b.

$a + b = 1 \rightarrow a = 1 - b$

$a - 3b + 1 = 5$

$1 - b - 3b + 1 = 5$

$-4b + 2 = 5$

$-4b = 3$

$-b = \frac{3}{4} \rightarrow \underline{b = -\frac{3}{4}}$

$a - \frac{3}{4} = 1 \rightarrow \underline{a = \frac{7}{4}}$

Řešením rovnice je:

$\frac{7}{4} + \left(-\frac{3}{4}\right)(-3)^n + n = \underline{\underline{\frac{7}{4} - \frac{3}{4}(-3)^n + n}}$

Kontrola:

$A(0) = 1 \rightarrow n = 0$

$$\frac{4}{4} - \frac{3}{4}(-3)^0 + 0 = \frac{4}{4} - \frac{3}{4}(1) + 0 = \frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = \underline{\underline{1}}$$

$$\underline{\underline{A(0) = 1}}$$

$A(1) = 5 \rightarrow n = 1$

$$\frac{4}{4} - \frac{3}{4} - (3)^1 + 1 = \frac{4}{4} - \frac{3}{4}(-3) + 1 = \frac{4 + 9}{4} + 1 = 4 + 1 = \underline{\underline{5}}$$

$$\underline{\underline{A(1) = 5}}$$

Ověřím, zda platí i pro jiná n

$n = 2$ $\quad \frac{4}{4} - \frac{3}{4}(-3)^2 + 2 = \frac{4}{4} - \frac{3}{4} \cdot 9 + 2 = -5 + 2 = \underline{\underline{-3}}$

$$A(n) = -2A(n-1) + 3A(n-2) + 4$$

$$A(2) = -2\underbrace{A(1)}_{5} + 3\underbrace{A(0)}_{1} + 4$$

$$= -2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 + 4 = -10 + 7 = \underline{\underline{-3}}$$

$$\underline{\underline{A(2) = -3}}$$

AD7B01MCS - Matematika pro informatiky
Domácí úlohy pro kombinované studium 2010/2011

Zpracovala: **Radoslava Jandová, jandora1**

Obor: **STM, softwarové inženýrství**
Semestr: **4. semestr, léto 2010/2011**

10

2.3. Odvoďte vzorec pro součet řady

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n} 2^k \cdot k^2$$

Nejprve upravím rovnici, abych ji mohla řešit jako rekurentní rovnici.

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \cdot k^2 = (2^n \cdot n^2) + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}}_{\Rightarrow S(n-1)} = 2^n \cdot n^2 + S(n-1)$$

Nyní sestavím rekurentní rovnici 1. řádu

$$S(n) = 2^n \cdot n^2 + S(n-1)$$

$$S(n) - S(n-1) = 2^n \cdot n^2$$

Výpočet vyžaduje jednu počáteční podmínku, zkusím $n = 0$.

$$S(0) = \sum_{k=0}^{0} 2^k \cdot k^2 = 2^0 \cdot 0^2 = \underline{\underline{0}}$$

<u>Řešení homogenní rovnice</u>

$$S(n) - S(n-1) = 0 \longrightarrow \lambda - 1 = 0$$

kořen $\lambda_1 = 1$

$FS = 1^n$

obecné řešení = lineární kombinace FS

$$a \cdot 1^n = \underline{\underline{a}}$$

Zpracovala: **Radoslava Jandová, jandora1**
Obor: **STM, softwarové inženýrství**
Semestr: **4. semestr, léto 2010/2011**

Partikulární řešení

$$S(n) - S(n-1) = 2^n \cdot n^2$$

$$\to A^n \cdot P(n)$$

$$A = 2$$

$P(n)$ = polyn. 2 stupně

Dosadím do partikulárního řešení

$$n^d \cdot A^n \cdot P(n)$$

$A = 2$ není kořen rovnice $\to d = 0$

$$n^0 \cdot 2^n (an^2 + bn + c) = \underline{\underline{2^n (an^2 + bn + c)}}$$

PŘ dosadím do rovnice $S(n) - S(n-1) = 2^n \cdot n^2$

$$2^n (an^2 + bn + c) - 2^{n-1}(a(n-1)^2 + b(n-1) + c) = 2^n \cdot n^2$$

$$2^n = 2 \cdot 2^{n-1}$$

$$2 \cdot 2^{n-1}(an^2 + bn + c) - 2^{n-1}(a(n-1)^2 + bn - b + c) = 2 \cdot 2^{n-1} \cdot n^2 \quad / : 2^{n-1}$$

$$2(an^2 + bn + c) - (a(n^2 - 2n + 1) + bn - b + c) = 2 \cdot n^2$$

$$2an^2 + 2bn + 2c - an^2 + 2an - a + bn - b + c = 2n^2$$

$$an^2 + 2an + bn - a + b + c = 2n^2$$

$$an^2 + (2a + b)n - a + b + c = 2n^2 + 0 \cdot n + 0$$

$$an^2 = 2n^2 \to a = 2$$

$$(2a + b)n = 0 \cdot n \to b = -4$$

$$-a + b + c = 0 \to c = 6$$

Hodnoty dosadím do PŘ $n^0 \cdot 2^n (an^2+bn+c)$

$$2^n(2n^2-4n+6)$$

Obecné řešení → součet řešení HR + TŘ

$$a + 2^n(2n^2-4n+6)$$

a z výsledku vypočtu hodnotu „a" pomocí počáteční podmínky $n = 0$

$$a + 2^0(2\cdot 0^2 - 4\cdot 0 + 6) = 0$$

$$a + 1\cdot 6 = 0$$

$$a = -6$$

Vzorec pro výpočet řady je

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n} 2^k \cdot k^2 = -6 + 2^n(2n^2-4n+6)$$

Kontrola - pro $n = 1$

$$\sum_{k=0}^{1} 2^k \cdot k^2 = -6 + 2^1(2\cdot 1^2 - 4\cdot 1 + 6)$$

$$(2^0 \cdot 0^2) + (2^1 \cdot 1^2) = -6 + 2(2-4+6)$$

$$2 = -6 + 2\cdot 4$$

$$\underline{\underline{2 = 2}}$$