Zpracovala: **Radoslava Jandová, jandora1** Jd

Obor: **STM, softwarové inženýrství**
Semestr: **4. semestr, léto 2010/2011**

1 MATEMATICKÁ INDUKCE

1.1. Matematickou indukcí ukažte, že $6 . 7^n - 2 . 3^n$ je dělitelné 4 pro každé $n \geq 1$.

__Řešení:__ Využiji princip indukce - nejprve zkusím slabý princip. Indukci povedu podle n.

Pro výpočet si určím $T(n)$.

$$T(n) : \frac{6 . 7^n - 2 . 3^n}{4} = k \in \mathbb{Z}$$

T(n) musí být výrok (aby šlo rozhodnout, zda je pravdivý či ne)

__1. krok:__ Ověřím platnost pro $n = 1$ přímým výpočtem.

$$T(1) : \frac{6 . 7^1 - 2 . 3^1}{4} = (6 . 7 - 2 . 3) : 4 = 42 - 6 : 4 = 36 : 4 = 9 \in \mathbb{Z}$$

$T(1)$ platí, protože 36 je dělitelné 4. ✓

$\forall n \, (T(n) \Rightarrow T(n+1))$

__2. krok:__ Nyní zkusím ověřit platnost ~~pro~~ ~~$T(n+1)$, což je~~ Proto libovolně zvolené číslo $n \geq 1$. a předpokládám, že pro toto n platí T(n) ... i.p.
Odvozuji, zda pro toto n platí další T(n+1)

$$T(n+1) : \frac{6 . 7^{n+1} - 2 . 3^{n+1}}{4} \in \mathbb{Z}$$

Nejprve provedu dekompozici

$$6 . 7^{n+1} - 2 . 3^{n+1} = \underbrace{6 . 7^n . 7^1 - 2 . 3^n . 3^1}_{T(n)}$$

$T(n)$ → dekompozice proběhla úspěšně a můžeme využít indukční předpoklad.

AD7B01MCS - Matematika pro informatiky
Domácí úlohy pro kombinované studium 2010/2011

Zpracovala: **Radoslava Jandová, jandora1**

Obor: **STM, softwarové inženýrství**
Semestr: **4. semestr, léto 2010/2011**

(2)

nejprve

IP: $6.7^n - 2.3^n$ je dělitelné 4 pro každé $n \geq 1$.

lib. ale pevně zvolené

Důkaz: Musím dokázat, že $6.7^n.7^1 - 2.3^n.3^1$ je dělitelné 4.

Použiju metodu rozkladu: $6.7^n.\underbrace{7^1}_{3+4} - 2.3^n.3^1 =$

$= 6.7^n.(3+4) - 2.3^n.3^1$ / závorku roznásobím
$= 3(6.7^n) + 4(6.7^n) - 2.3^n.3^1$
$= 3.6.7^n - 2.3^n.3 + 4.6.7^n$ / vytknu 3
$= 3(6.7^n - 2.3^n) + 4.6.7^n$

Dál není nutno důkaz provádět, lze logicky odvodit platnost takto:

$\Rightarrow 6.7^n - 2.3^n$ je dělitelné 4 $\Rightarrow 3(6.7^n - 2.3^n)$ bude rovněž dělitelné 4, protože ~~je každá~~ ~~bezpeč~~ číslo dělitelné 4 lze vynásobit jiným libovolným číslem aniž by ztratilo dělitelnost 4

$\rightarrow 4.6.7^n$ je rovněž dělitelné 4, protože jde o násobek čísla 4

$\rightarrow$ součet dvou čísel dělitelných 4 je pak rovněž dělitelný 4

Výraz $6.7^n - 2.3^n$ je dělitelný 4 pro všechna $n \geq 1$. Byl použit slabý princip indukce.

AD7B01MCS - Matematika pro informatiky
Domácí úlohy pro kombinované studium 2010/2011

Zpracovala: **Radoslava Jandová, jandora1**

Obor: **STM, softwarové inženýrství**
Semestr: **4. semestr, léto 2010/2011**

(3)

1.2. Matematickou indukcí ukažte, že pro všechna $n \geq 0$ platí $\sqrt{0} + \sqrt{1} + \dots + \sqrt{n} < \frac{2}{3}(n+1)\sqrt{n+1}$

Řešení: Zkusím použít slabý princip indukce a povedu indukci podle n. ✓

$$T(n): \underbrace{\sqrt{0} + \sqrt{1} + \dots + \sqrt{n}}_{\text{lze vyjádřit jako } \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k}} < \frac{2}{3}(n+1)\sqrt{n+1}$$

1. krok: Ověřím platnost pro $n = 0$, a to přímým výpočtem ✓

$$T(0): \sum_{k=0}^{0} \sqrt{k} < \frac{2}{3}(0+1)\sqrt{0+1}$$

$$\sqrt{0} < \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \sqrt{1}$$

$$0 < \frac{2}{3} \rightarrow \text{pro } n = 0 \text{ platí} ✓$$

2. krok: Zkusím ověřit platnost pro $T(n+1)$, což je libovolně zvolené $n \geq 0$.

$$T(n+1): \sum_{k=0}^{n+1} \sqrt{k} < \frac{2}{3}\left((n+1)+1\right)\sqrt{(n+1)+1}$$

Levou stranu lze snadno dekomponovat:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \sqrt{k} = \sqrt{n+1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k}}_{T(n)} ✓$$

$T(n) \rightarrow$ dekompozice byla úspěšná a lze vyslovit indukční předpoklad.

to lze vždy, ten učiním nejdříve, až pak dokazuji platnost pro $n+1$

Zpracovala: **Radoslava Jandová, jandora1**

Obor: **STM, softwarové inženýrství**
Semestr: **4. semestr, léto 2010/2011**

první zvolení

IP: pro libovolné $n \geq 0$ platí nerovnost

$$\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k} < \frac{2}{3}(n+1)\sqrt{n+1}$$

Důkaz:

používá i.p.

$$\sqrt{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k} < \sqrt{n+1} + \frac{2}{3}(n+1)\sqrt{n+1}$$

Pravou stranu nerovnice upravím dále běžnou aritmetikou.

$$\sqrt{n+1} + \frac{2}{3}(n+1)\sqrt{n+1} \quad \Big/ \text{ použiju trik } +/-1$$

$$= \sqrt{n+1} + \frac{2}{3}(n+1\underline{+1-1})\sqrt{n+1} =$$

$$= \sqrt{n+1} + \frac{2}{3}(n+2-1)\sqrt{n+1} \quad \Big/ \text{ roznásobím závorku}$$

$$= \sqrt{n+1} + \left(\left(\frac{2}{3}(n+2)\right) - \frac{2}{3}\right)\sqrt{n+1} \quad \Big/ \text{ roznásobím s odmocninou}$$

$$= \sqrt{n+1} + \frac{2}{3}(n+2)\sqrt{n+1} - \frac{2}{3}\sqrt{n+1} =$$

$$= \frac{3}{3}\sqrt{n+1} + \frac{2}{3}(n+2)\sqrt{n+1} - \frac{2}{3}\sqrt{n+1} \quad \Big/ \text{ odečtu odmocniny}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{n+1} + \frac{2}{3}(n+2)\sqrt{n+1} \quad \Big/ \text{ vytknu odmocninu}$$

$$= \sqrt{n+1}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}(n+2)\right)$$

Další úpravy již nevedou k potřebnému výsledku, proto dál zkusím počítat jako nerovnici, kde na druhou stranu dosadím $\frac{2}{3}(n+2)\sqrt{n+2}$

Zpracovala: **Radoslava Jandová, jandora1**

Obor: **STM, softwarové inženýrství**
Semestr: **4. semestr, léto 2010/2011**

5

$$\sqrt{n+1}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}(n+2)\right) \leq \underbrace{\frac{2}{3}(n+2)\sqrt{n+2}}_{T(n+1)} \quad \Big/ \text{umocním}$$

$$n+1\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}(n+2)\right)^2 < \frac{4}{9}(n+2)^2(n+2)$$

$$n+1\left(\frac{1+2(n+2)}{3}\right)^2 < \frac{4}{9}(n^2+4n+4)(n+2)$$

$$n+1\,\frac{(1+2n+4)^2}{9} < \frac{4(n^3+4n^2+4n+2n^2+8n+8)}{9}$$

$$\frac{(n+1)(25+20n+4n^2)}{\cancel{9}} < \frac{4n^3+24n^2+48n+32}{\cancel{9}}$$

$$\cancel{4n^3}+\cancel{24n^2}+45n+25 < \cancel{4n^3}+\cancel{24n^2}+48n+32$$

$$45n-48n < 32-25$$

$$-3n < 7$$

$$3n \;\cancel{<}\; > -7 \;\Rightarrow\; \text{pro } n \geq 0 \text{ platí}$$

Přitom úpravy byly ekvivalentní (nutno zkontrolovat), tudíž platí dokazovaná nerovnost ⊛

Důkazem bylo ověřeno, že nerovnice je platná pro libovolné $n \geq 0$.
Byl použit slabý princip indukce.

AD7B01MCS - Matematika pro informatiky
Domácí úlohy pro kombinované studium 2010/2011

Zpracovala: **Radoslava Jandová, jandora1**

Obor: **STM, softwarové inženýrství**
Semestr: **4. semestr, léto 2010/2011**

6

1.3. Matematickou indukcí ukažte, že pro všechna $n \geq 0$ platí

$$\sum_{k=0}^{n} (k! \cdot k) = (n+1)! - 1$$

Řešení: Zkusím použít princip slabé indukce. Indukci povedu podle n.

$$T(n): \sum_{k=0}^{n} (k! \cdot k) = (n+1)! - 1$$

1. krok: Zkusím ověřit, zda rovnice platí pro $n = 0$, a to prostým dosazením a výpočtem.

$$T(0): \sum_{k=0}^{0} (k! \cdot k) = (0+1)! - 1$$

$$\sum_{k=0}^{0} (0! \cdot 0) = 1 - 1$$

$$0 = 0 \rightarrow \text{pro } n = 0 \text{ platí}$$

2. krok: Nyní zkusím ~~ověřit platnost rovnice pro libovolné~~ $n \geq 0$. Ověřuji pouze implikaci $T(n) \Rightarrow T(n+1)$

i.p. pro lib. pevné n platí $T(n)$

chci dokázat: $$T(n+1): \sum_{k=0}^{n+1} (k! \cdot k) = ((n+1)+1)! - 1$$

Provedu dekompozici levé strany rovnice:

použiji i.p. a upravuji až na pravou str. rovnice

$$L = ((n+1)! \cdot (n+1)) + \sum_{k=0}^{n} (k! \cdot k) \overset{?}{=} ((n+1)+1)! - 1$$

tuto rovnost chci dokázat

Dekompozice se podařila, mohu využít indukční předpoklad.

AD7B01MCS - Matematika pro informatiky
Domácí úlohy pro kombinované studium 2010/2011

Zpracovala: **Radoslava Jandová, jandora1**

Obor: **STM, softwarové inženýrství**
Semestr: **4. semestr, léto 2010/2011**

IP: Pro libovolné $n \geq 0$ platí

$$\sum_{k=0}^{n} (k! \cdot k) = (n+1)! \cdot \cancel{k} \; -1$$

Důkaz:

$$\big((n+1)! \cdot (n+1)\big) + \sum_{k=0}^{n} (k! \cdot k) = \underbrace{\big((n+1)+1\big)!}_{(n+2)!} - 1$$

$$L = \big((n+1)! \cdot (n+1)\big) + \sum_{k=0}^{n} (k! \cdot k) \overset{i.p.}{=} \big((n+1)! \cdot \cancel{k}(n+1)\big) + (n+1)! - 1 =$$

Pravou stranu upravím běžným aritmetickým postupem. úpravy

$$\big((n+1)! \cdot (n+1)\big) + (n+1)! - 1 = \quad / \text{vytknu } (n+1)!$$

$$(n+1)! \big((n+1) + 1\big) - 1 = \underbrace{(n+1)! \, (n+2)}_{(n+2)!} - 1$$

$$= \underline{(n+2)! - 1} = P$$

Rovnice je platná pro všechna $n \geq 0$.
Byl použit slabý princip indukce.