7 Pologrupy, monoidy, grupy

1. Množina A se skládá ze všech vzájemně jednoznačných zobrazení $f\colon \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$. Napište tabulku monoidu $(A, \circ)$, kde $\circ$ je skládání zobrazení, a rozhodněte, zda se jedná o pologrupu, monoid či grupu. Je operace $\circ$ komutativní?

2. Na množině R reálných čísel je definována relace $*$ předpisem $x * y = x + y + x^2 y$. Dokažte, že operace $*$ má neutrální prvek, má všechny pravé inverzní prvky, ale nemá všechny levé inverzní prvky.

3. Označme M množinu všech čtvercových matic

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

kde a, b jsou celá čísla. Ukažte, že M spolu s násobením matic tvoří grupoid. Je M monoid? (Asociativitu maticového násobení ověřovat nemusíte.) Které prvky z M mají inverzní prvek v M?

► Veškeré ověřované pojmy nejdříve definujte.

7.1

1) rozepsat prvky množiny
~~zobrazení~~ $(f \circ g)$
skládání fcí $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
obrácené skládání $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
$f(g(x))$ g f
$1 \to 1$
2 2
$\vdots$ $\vdots$

2) ~~f~~ prvky číslovat – id první
$f_1, f_2, \dots$

3) ~~t~~ napsat tabulku

4) ~~určit~~ určím, zda je to pologrupa, ...

7.2

1) neutrální prvek $\exists e \, \forall a$, $e \in R$
pak platí $a * e = a = e * a$
– počítám každou stranu rovnosti zvlášť – nejprve L, pak P
– dosadím $*$ a ~~pak~~ vypočítám

2) P inverzní prvky
$\forall a \, \exists a^{-1}$, $a, a^{-1} \in R$, pak platí
$a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$

- počítám P inverz → dosadím do L strany dle *
- za y dosadím $\underline{a}^{-1}$, $\underline{x} = \underline{a}$
- odvodím podmínky platnosti
- inverzi má, pokud je výsl. > 0

3) L inverzy
   - dosadím do P strany a řeším
   - tady řeším kvadratickou rovnici $ax^2 + bx + c = 0$
   - hledám, kdy nemá řešení, tzn. diskriminant < 0

   $D = b^2 - 4ac$. $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2}$

   - určím rozsah platnosti

(4.3)

1) definice *
2) grupoid (M, *) → prokázat, že výsledná M*x operace * leží v M
   - výsledek nahradím jinými proměnnými, pokud má M* stejný tvar jako M, pak ~~M~~ M* ∈ M
3) je monoid?
   = grupoid, kde je ~~~~ * asociativní a má neutrální prvek
4) hledám neutrál
   $\exists e \forall a$, $a \in M$; $a * e = a = e * a$
   u matic je neutrál E, takže ověřím platnost ~~M*E~~