5 Lineární algebra nad $\mathbb{Z}_n$

1. V $\mathbb{Z}_7$ řešte soustavu s parametrem a:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & + & y & + & 2z & + & 4u & = & 2 \\ 5x & + & 4y & + & z & + & 3u & = & 3 \\ x & + & 5y & + & 3z & & & = & a \end{array}$$

2. V $\mathbb{Z}_6$ je dána matice

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 2 \\ 1 & t+2 \end{pmatrix}.$$

Najděte všechny hodnoty parametru t, pro které existuje A_t^{-1}, a příslušné inverzní matice vypočtěte.

3. Je dána generující matice G lineárního kódu nad $\mathbb{Z}_5$. Najděte nějakou kontrolní matici H tohoto kódu a pomocí ní ověřte, zda bylo slovo $v = (2\,2\,1\,1\,3)$ přijato bez chyb. Pokud to jde, tak případnou chybu opravte (předpokládáme, že nedošlo více než k jedné chybě).

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

5.1 1) soustavu přepsat do matice a řešit GEM
2) dopočítat proměnné
3) diskuse nad parametrem
$a = X$ → najít možná řešení, tzn.
~~$a \neq X$~~ najít vektor a rozepsat
$a \neq X$ po složkách
4) počet řešení n^k → počet vektorů

5.2 hledám a_t^{-1} → det a_t musí mít inverzi
$a_t^{-1} = \det a_t^{-1} \cdot D^T$ D = matice doplňků
$a_t \cdot a_t^{-1} = E$ D^T = transpon. matice
E = jednotková matice

$$A = \begin{pmatrix} \overset{3}{a_{11}} & \overset{1}{a_{12}} \\ \overset{2}{a_{21}} & \overset{1}{a_{22}} \end{pmatrix} \quad D: \begin{aligned} a_{11} &= (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \\ a_{12} &= (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \\ a_{21} &= (-1)^{2+1} \cdot a_{21} \\ a_{22} &= (-1)^{2+2} \cdot a_{22} \end{aligned}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad D^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det a_t = t(t+2) - 2 \cdot 1 = t^2 + 2t - 2$$

1) zjistit, pro které hodnoty t má $\det A_t$ inverzi v $\mathbb{Z}_6$

$t_0 \to \det A_0 = -2 = 4 \quad \det A_0^{-1} = \emptyset$

$\times\ t_1 \to \det A_1 = 1+2-2 = 1 \ \det A_1^{-1} = 1$

$\vdots$

$t_5 \to \det A_5 \dots$

musí vyjít prvočíslo, pak má inverz

2) A_t^{-1} hledám JEN po t, která mají inverz

3) konkrétní t dosadit do vzorce $A_t^{-1} = \det A_t^{-1} \cdot D^T$

násobení matic

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (as+bu) & (at+bv) \\ (cs+du) & (ct+dv) \end{pmatrix}$$

4) vypočítat pro všechna t, kde je $\det A_t^{-1}$

<u>transponovaná matice</u> = řádky se převedou na sloupce, pozice 11 zůstává na místě.

~~determinant~~

5.3 1) matici upravíme GEM

2) určíme hodnost M = počet lineárně nezávislých řádků (~~= počet bázových proměnných~~)

3) v řádcích hledané matice H budou prvky FS homogen. rovnice

počet ~~prvků~~ řádků FS : počet prvků M − hodnost M

4) prvky musí být lineárně nezávislé, tzn. budou to taková vektory

$$\left.\begin{matrix} (a_1, a_2, 1, 0, 0) \\ (b_1, b_2, 0, 1, 0) \\ (c_1, c_2, 0, 0, 1) \end{matrix}\right\}$$ H o 3 řádcích

počet a, b, c ... dle počtu řádků M

5) dosadím vektory do matice (postupně) a najdu proměnné ~~podle vzhledu M je~~ je jedno, kde se počítá od a_1 nebo a_2

6) k výsledků sestavím matici H

7) ověřím, zda bylo slovo $\underline{v}$ přijato bez chyb → H · v

8) výsledek = 0 → OK

≠ 0 → je chyba

9) zkusím odhadnout sloupec, kde je chyba → měl by to být sloupec, který je násobkem výsledku

10) ve slově $\underline{v}$ odečtu hodnotu násobku z první pozice a provedu zkoušku

11) pokud to nevyjde, odečtu z další pozice