2 Rekurentní rovnice

1. Najděte obecné řešení rekurentní rovnice:

$$X(n+3) - 5X(n+2) + 8X(n+1) - 4X(n) = n3^n + 2$$

2. Řešte rekurentní rovnici s počátečními podmínkami:

$$A(n) = -2A(n-1) + 3A(n-2) + 4, \quad A(0) = 1,\ A(1) = 5.$$

3. Odvoďte vzorec pro součet řady $S(n) = \sum_{k=0}^{n} 2^k k^2$.

2.1

1) rovnici si vyjádřím jako polynom
$\lambda^n + \lambda^{n-1} + \lambda^1 + \lambda^0 =$

2) počítám homogenní rovnici, tj. $= 0$

3) hledám kořeny λ_n – ~~podle~~ počet $\underline{n}$ dle stupně polynomu

4) u polynomu λ^3 se pokusím λ_1 odhadnout postupným dosazením $0, 1, 2 \ldots$

5) ~~pak~~ kořen oddělím a z polynom 2 st. vypočtu zbylé 2 kořeny
např. $\lambda_1 = 1 \quad \lambda_{2,3} = 2$

6) kořeny = posloupnosti do fundament. systému FS
~~stejn~~ $\lambda_1 = 1 \rightarrow n^0 \cdot 1^n = 1^n$
$\lambda_2 = 2 \rightarrow n^0 \cdot 2^n = 2^n$
$\lambda_3 = 2 \rightarrow n^1 \cdot 2^n = n \cdot 2^n$

7) odvodím obecné řešení
$a \cdot 1^n + b \cdot 2^n + c \cdot n \cdot 2^n$

8) hledám partikulární řešení →
P stranu musím mít ve tvaru
konstanta ← $A^n \cdot P(n)$ → polynom

např. P strana je $= n\,3^n + 2$
→ řeším zvlášť pro $n 3^n$ a pro 2

9) pro $n\,3^n$

polynom $\quad$ A^n

- přepíšu rovnici $\quad \dots\dots = n \cdot 3^n$
- předpoklady $A^n \cdot P_{(n)} \geq 0$

$A = 3$

P = polynom 1 stupně

10) dosadím do vzorce

$n^d \cdot A^n \cdot P(n)$, $n \geq n_0$

~~Ab~~ $A = 3$ není kořenem $\rightarrow n^d = n_0$

$P(n)$ lze vyjádřit $\quad a \cdot n^1 + b \cdot n^0 = an + b$

11) ~~do~~ dosadím do rovnice

$n^0 \cdot 3^n \cdot (an + b) = 3^n \cdot (an + b)$

12) ~~dosadí~~ do pův. rovnice dosadím tak, že za X dosadím ~~t~~ partikulární řeš. $3^{n+?}(an+b)$ a z $\underline{n}$ vždy odpovídající hodnotu $(n + \dots)$

~~→~~ $X(n+3) - 5X(n+2) + 8X(n+1) - 4X(n) = n\,3^n$

$\rightarrow 3^{n+3}\left(a(n+3)+b\right) - 5\left(3^{n+2} \cdot a(n+2)+b\right) + 8 \cdot 3^{n+1} \cdot \left(a(n+1)+b\right) - 4 \cdot 3^n (an+b) = n \cdot 3^n$

13) ~~vy~~ rovnici upravím ~~z~~, ~~najednodu~~

$\rightarrow 2an + 15a + 2b = n$, resp. $1 \cdot n + 0$

14) ~~dos~~ z této rovnice dostanu

$\underline{2an} + 15a + 2b = \underline{1 \cdot n} + 0$

$2an = 1 \cdot n$

$a = \frac{1}{2}$

$15a + 2b = 0 \rightarrow \frac{15}{2} + 2b = 0$

$b = -\frac{15}{4}$

15) výsledky dosadím do partikul. řeš.
$3^n(an+b) \longrightarrow 3^n\left(\frac{n}{2}-\frac{15}{4}\right)$

16) řeším pro 2
- ~~A~~ přepíšu do tvaru $A^n \cdot P(n) \rightarrow 1^n \cdot 2$

$A^n,\ A=1$. $P(n)$
polynom nult. st.

17) dosadím do $n^d \cdot A^n \cdot P(n)$
$A=1 \rightarrow$ je kořenem $\Rightarrow d=1$
$\rightarrow n^1 \cdot 1^n \cdot a = n \cdot 1 \cdot a = na$

18) dosadím do rovnice
- za $X \rightarrow n \cdot a$
- za $\underline{n} \rightarrow$ odpovídající hodnota $(n+3 \dots)$

19) rovnici upravím a vypočtu

20) partikulární řešení = součet
$3^n\left(\frac{n}{2}-\frac{15}{4}\right)+2$

21) obecné řeš. rovnice = součet
homog. a partikul. řeš.
$\rightarrow a \cdot 1^n + b \cdot 2^n + c \cdot 2^n + 3^n\left(\frac{n}{2}-\frac{15}{4}\right)+2$

2.2 1) předpoklad $n \in \mathbb{N}$

2) upravím rovnici, aby A byly na L straně

3) ~~viz 2.1~~ řešení homogenní rovnice
viz 2.1 2) – 7)

4) partikulární řešení – ~~hled~~ princip superpozice
– předpoklad $4 = A^n \cdot P(n)$, $n \geq n_0$
– úvaha $P(n) = a \rightarrow a = 4 \rightarrow P(n) = 4$

5) pak by existovalo řešení
$n^d \cdot A^n \cdot P(n)$, $n \geq n_0$
d = násobnost A jako kořene $x_1 = 1$
$\rightarrow n^1 \cdot 1^n \cdot a = n \cdot a$

6) hledám koef. $\underline{a}$ $\rightarrow$ $n \cdot a$ dosadím do pův. rovnice za $A(n)$

7) upravím a vypočtu $\underline{a}$

8) $\underline{a}$ dosadím do $n \cdot a$ a vypočtu n

9) sečtu homogen. a partikul. řeš.
$$\text{tedy} = \underbrace{a + b(-3)^n}_{FS} + \underbrace{n}_{PŘ}$$

10) mám $\underline{a}$, $\underline{b}$ a dvě počáteční podmínky
$A(0) = 1 = n$
$A(1) = 5 = n$

11) sestavím rovnici, tj. dosadím do 9) tedy
$1 = A(0) \rightarrow a + b(-3)^0 + 0 = 1$
$a + b = 1$

$5 = A(1) \rightarrow a + b(-3)^1 + 1 = 5$
$a - 3b + 1 = 5$

12) mám 2 rovnice → vypočtu a a b

13) dosadím do řešení viz 9) a vypočtu řešení

2.3

1) upravím na rovnici ~~jako rekurentní~~

2) sestavím rekurentní rovnici 1. řádu

3) musím stanovit 1 počáteční podmínku

4) řešení homog. rovnice
   viz 2.1 2) – 4)

5) partikul. řešení viz 2.1 8) – 15)

6) obecné řešení → součet 4)+5)