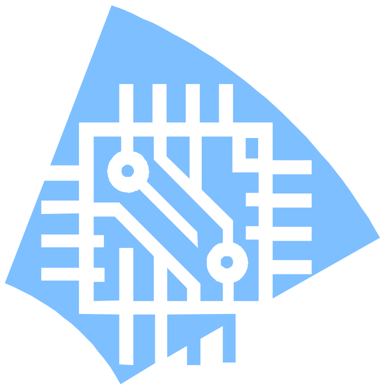
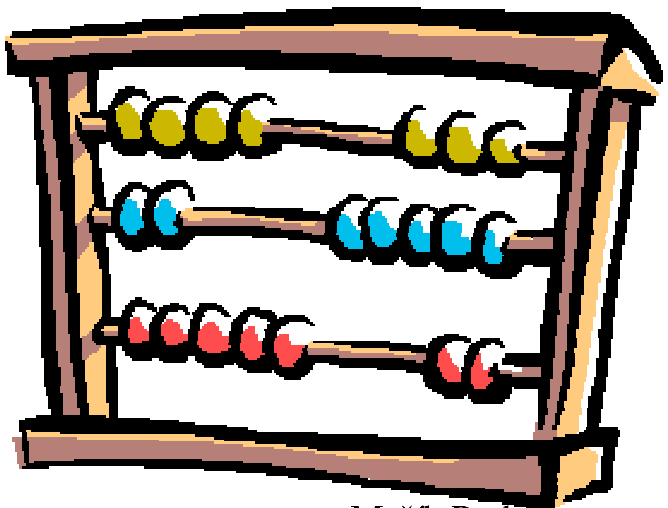
Číslicová technika

Radek Mařík



Číselné soustavy a aritmetické operace



Převody mezi soustavami (z→10)

Výsledek dostaneme vyčíslením z-adického čísla ve tvaru řady.

$(101{,}11)_2 = 1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0 + 1.2^{-1} + 1.2^{-2} = (5{,}75)_{10}$

$(276{,}4)_8 = 2.8^2 + 7.8^1 + 6.8^0 + 4.8^{-1} = (190{,}5)_{10}$

$(8E2{,}A)_{16} = 8.16^2 + 14.16^1 + 2.16^0 + 10.16^{-1} =$

$= (2274{,}625)_{10}$

Převody mezi soustavami (10→2)

Číslo před desetinnou čárkou dělíme dvěma a zapisujeme zprava doleva zbytky při dělení:

$(364)_{10} = (101101100)_2$

182 $\leftarrow$

91

45

22

11

5

2

1

Převody mezi soustavami (10→2)

Číslo za des. čárkou násobíme dvěma a zapisujeme zleva doprava přenosy před des. čárkou:

$(0{,}364)_{10} = (0{,}01011101\ldots)_2 = (0{,}36328125)_{10}$

728 →

$\underline{1}$,456

912

$\underline{1}$,824

$\underline{1}$,648

$\underline{1}$,296

592

$\underline{1}$,184

Převody mezi soustavami (8↔2)

Číslo ve dvojkové soustavě rozdělíme od desetinné čárky do tříčlenných skupin:

$(11101100{,}11001)_2 = (11 \mid 101 \mid 100\ ,\ 110 \mid 01)_2 =$
$= (354{,}62)_8$

Každou cifru v oktalové soustavě zapíšeme jako trojciferné dvojkové číslo:

$(27{,}31)_8 = (10\ 111{,}011\ 001)_2$

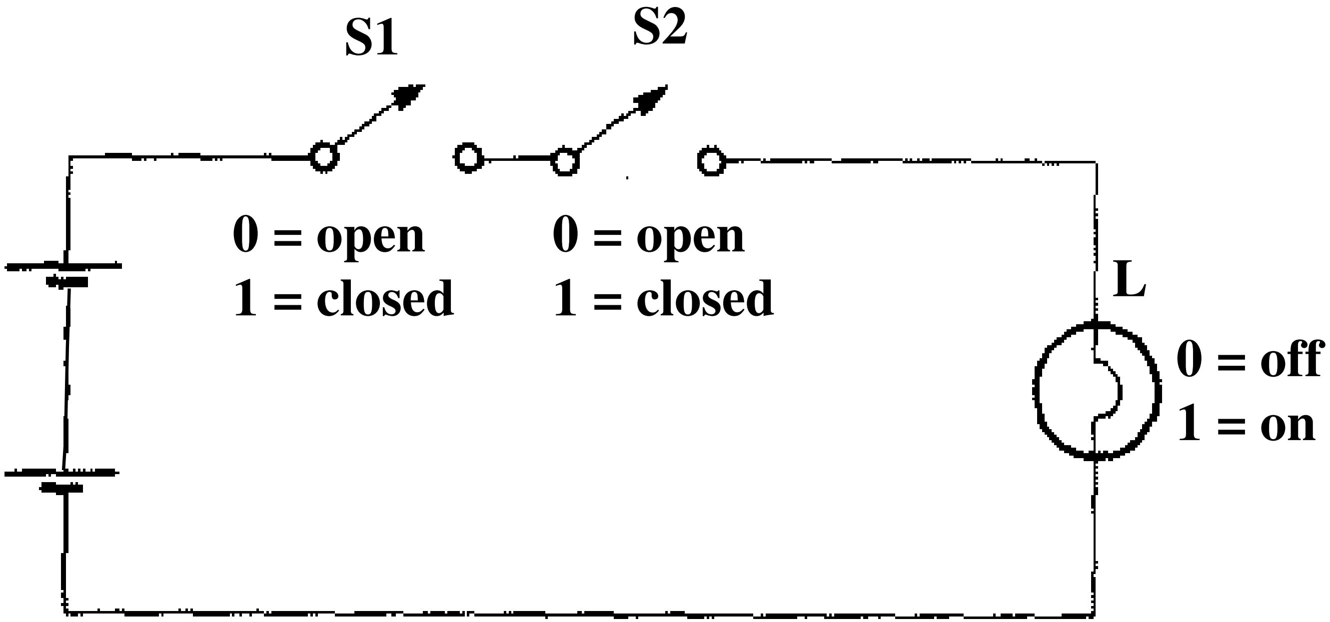
Jedna číslice soustavy o základu $z = 2^n$ odpovídá n číslicím binární soustavy

Převody mezi soustavami (16↔2)

Číslo ve dvojkové soustavě rozdělíme od desetinné čárky do čtyřčlenných skupin:
$(101101100{,}101101)_2 = (1 \mid 0110 \mid 1100 \, , \, 1011 \mid 01)_2$
$= (16C{,}B4)_{16}$

Každou cifru v hexadecimální soustavě zapíšeme jako čtyřciferné dvojkové číslo:
$(E7{,}1A)_{16} = (1110\ 0111{,}0001\ 101)_2$

Logické funkce - součin



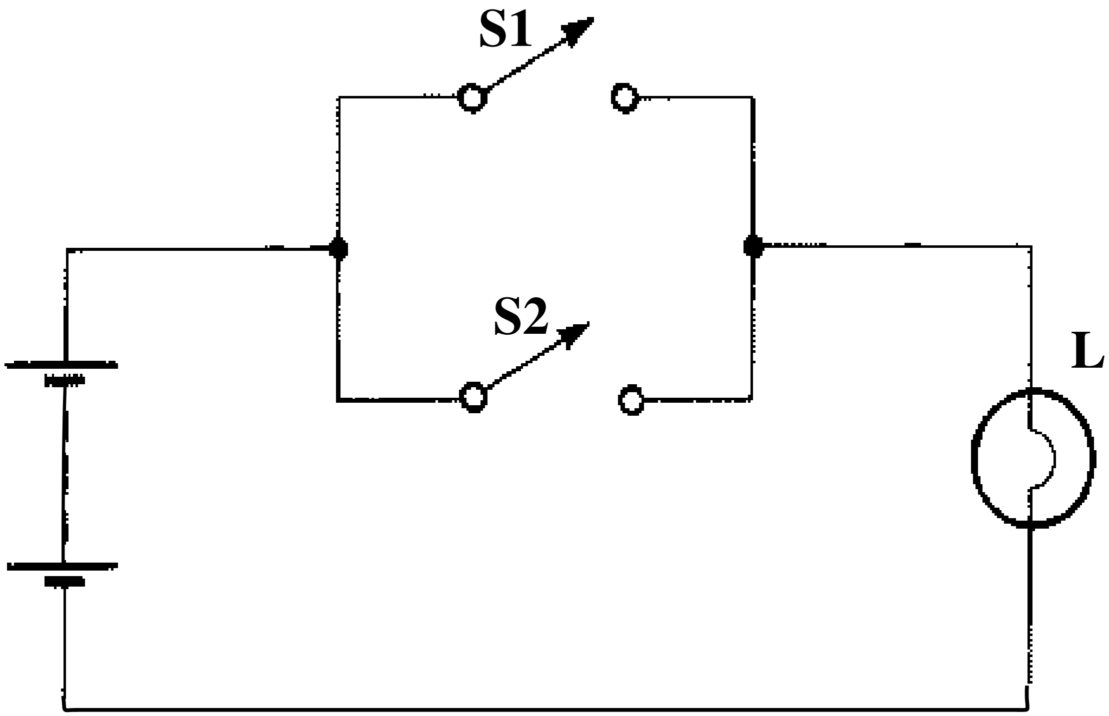
(a) Obvod

S1	S2	L
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(b) pravdivostní tabulka

Dva spínače v sérii

Logické funkce - součet



(a) Obvod

S1	S2	L
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

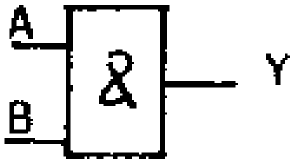
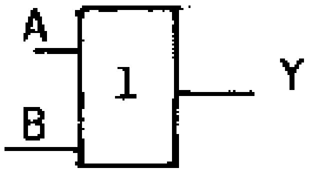
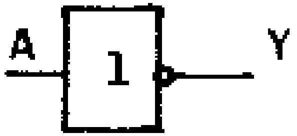
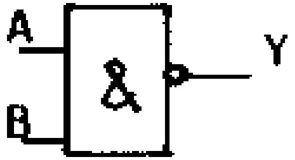
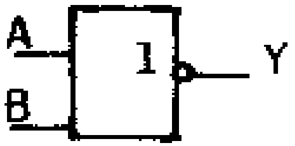
(b) Pravdivostní tabulka

Dva paralelní spínače

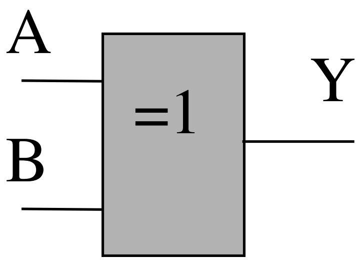
Úplný soubor logických funkcí

- součin + negace
- negovaný součin
- součet + negace
- ...

Schematické značky podle ČSN

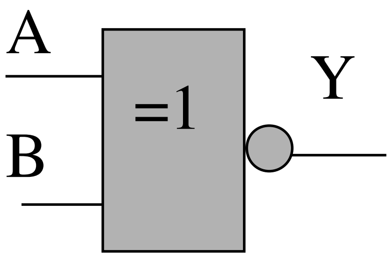
Schématická značka obvodu	Algebraické vyjádření	Funkce	Označení
	$Y = A.B$	logický součin	"AND"
	$Y = A+B$	logický součet	"OR"
	$Y = \overline{A}$	logická negace	"INVERT" nebo "NON"
	$Y = \overline{A.B} = \overline{A}+\overline{B}$	Shefferova funkce	"NAND"
	$Y = \overline{A+B} = \overline{A}.\overline{B}$	Pierceova funkce	" NOR "

Nonekvivalence



A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

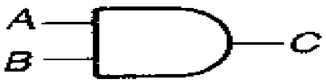
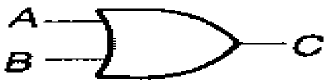
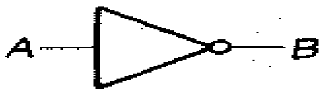
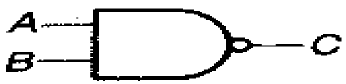
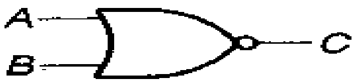
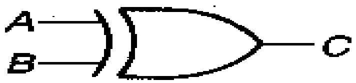
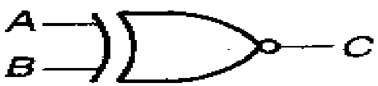
Ekvivalence



A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

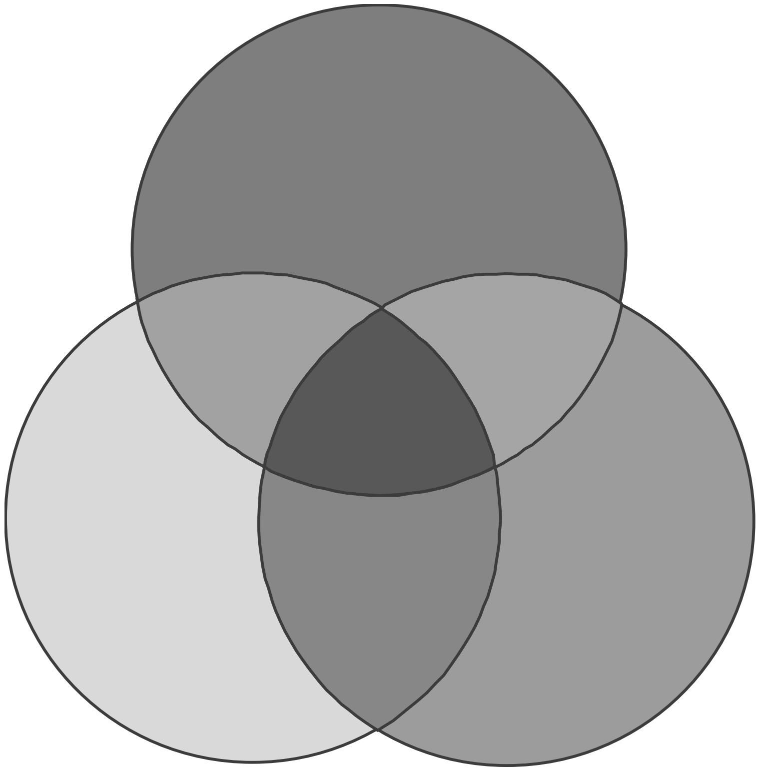
Všechny funkce dvou proměnných

a,b	00	01	10	11		
	0	0	0	0	**f = 0**	nulová funkce
	0	0	0	1	**f = ab**	log. součin
	0	0	1	0	**f = ab´**	
	0	0	1	1	**f = a**	identita a
	0	1	0	0	**f =a´b**	
	0	1	0	1	**f = b**	identita b
	0	1	1	0	**f = a´b+ab´**	nonekvivalence
	0	1	1	1	**f = a+b**	log. součet
	1	0	0	0	**f = a´b´**	
	1	0	0	1	**f = ab+a´b´**	ekvivalence
	1	0	1	0	**f = b´**	negace b
	1	0	1	1	**f = a+b´**	
	1	1	0	0	**f = a´**	negace a
	1	1	0	1	**f = a´+b**	
	1	1	1	0	**f = a´+b´**	
	1	1	1	1	**f = 1**	

Function	*Symbol*	*Boolean representation*	*Truth table*
AND		$C = A \cdot B$	A B | C 0 0 | 0 0 1 | 0 1 0 | 0 1 1 | 1
OR		$C = A + B$	A B | C 0 0 | 0 0 1 | 1 1 0 | 1 1 1 | 1
NOT		$B = \overline{A}$	A | B 0 | 1 1 | 0
NAND		$C = \overline{A \cdot B}$	A B | C 0 0 | 1 0 1 | 1 1 0 | 1 1 1 | 0
NOR		$C = \overline{A + B}$	A B | C 0 0 | 1 0 1 | 0 1 0 | 0 1 1 | 0
Exclusive-OR		$C = A \oplus B$	A B | C 0 0 | 0 0 1 | 1 1 0 | 1 1 1 | 0
Exclusive-NOR		$C = \overline{A \oplus B}$	A B | C 0 0 | 1 0 1 | 0 1 0 | 0 1 1 | 1

Booleova algebra

- **ZákonyBooleovy algebry**
- **Vyjádření logických funkcí**
  - **pravdivostní tabulka**
  - **logický výraz**
  - **mapa**



Základní zákony Booleovy algebry

(8 axiomů)

1. komutativita: $a + b = b + a$, $a.b = b.a$
2. asociativita: $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a.(b.c) = (a.b).c$
3. distributivita: $a + (b.c) = (a + b).(a + c)$, $a.(b + c) = (a.b) + (a.c)$
4. neutralita 0 a 1: $a + 0 = a$, $a.1 = a$
5. vlastnosti komplementu: $a + \overline{a} = 1$ $a \cdot \overline{a} = 0$
6. agresivita 0 a 1 : $a \cdot 0 = 0$, $a + 1 = 1$
7. idempotence $a \cdot a = a$, $a + a = a$
8. absorbce $a + a \cdot b = a$, $a \cdot (a + b) = a$

Odvozené zákony

dvojí negace	$\overline{\overline{a}} = a$,	
absorbce negace	$a + \overline{a} \cdot b = a + b$,	$a \cdot (\overline{a} + b) = a \cdot b$
de Morgan	$\overline{(a + b)} = \overline{a} \cdot \overline{b}$,	$\overline{(a \cdot b)} = \overline{a} + \overline{b}$
consensus	$ab + \overline{a}c + bc = ab + \overline{a}c$,	$(a + b) \cdot (\overline{a} + c) \cdot (b + c) = (a + b) \cdot (\overline{a} + c)$

Příklad aplikace zákonů Booleovy algebry

Nalezněte MNDF funkce f zadanou Booleovým výrazem:

$$\boxed{f = \bar{a}d + \bar{b}cd + a\bar{b}(c+d) + \bar{b}\bar{c}\bar{d}}$$

Distributivní zákon: $f = \bar{a}d + \bar{b}cd + a\bar{b}c + a\bar{b}d + \bar{b}\bar{c}\bar{d}$

zákon absorbce negace: $\{\ \bar{a}d + a\bar{b}d = d(\bar{a} + \bar{b})\ \}$

$$f = \bar{a}d + \bar{b}cd + a\bar{b}c + \bar{b}d + \bar{b}\bar{c}\bar{d}$$

Absorbce negace: $\{\ \bar{b}d + \bar{b}\bar{c}\bar{d} = \bar{b}(d + \bar{c})\ \}$

$$f = \bar{a}d + \bar{b}cd + a\bar{b}c + \bar{b}d + \bar{b}\bar{c}$$

Absorbce negace: $\{\ a\bar{b}c + \bar{b}\bar{c} = \bar{b}(\bar{c} + a)\ \}$

$$f = \bar{a}d + a\bar{b} + \bar{b}cd + \bar{b}d + \bar{b}\bar{c}$$

Absorbce: $f = \bar{a}d + a\bar{b} + \bar{b}d + \bar{b}\bar{c}$

consensus: $\boxed{f = \bar{a}d + a\bar{b} + \bar{b}\bar{c}}$ $\Downarrow$ **a to je MNDF**

Zákon negace

- **zobecněný zákon negace (logické funkce) :**

$$\overline{F}(a, b, \ldots, z, 0, 1, +, \cdot) = F(\overline{a}, \overline{b}, \ldots, \overline{z}, 1, 0, \cdot, +)$$

Vyjádření logické funkce

- **slovní popis**
- **algebraický výraz**
- **tabulka**
- **mapa**
- **jednotková krychle**

Algebraický (Booleový) výraz

- **představuje funkci nad B. Jednu funkci lze popsat více výrazy. Používá se standartní (kanonický) tvar. Tento tvar se též někdy nazývá normální formou.**
- **<u>term</u> - výraz tvořený pouze proměnnými v přímém a negovaném tvaru a operací logického součtu nebo součinu**
- **<u>P-term</u> (součinový term) - term s operací součinu**
- **<u>S-term</u> (součtový term) - operace součtu**
- **<u>minterm</u> - P-term obsahující všechny nezávislé proměnné**
- **<u>maxterm</u> - S-term obsahující všechny nezávislé proměnné**
- **<u>vstupní písmeno</u> - kombinace hodnot vst. proměnných**

- **Každou log. funkci je možno vyjádřit pomocí součtu mintermů nebo součinu maxtermů**
- **Každý minterm (resp. maxterm) nabývá hodnoty log1 (resp. log0) právě pro jedno vstupní písmeno dané log. funkce**
- **<u>Stavový index</u> - desítkový zápis kombinace hodnot nezávisle proměnných**
- **<u>Úplná normální disjunktní forma</u> (UNDF) log. výraz tvořený součtem všech mintermů**
- **<u>Úplná normální konjunktivní forma</u> (UNKF) - log. výraz tvořený součinem všech maxtermů.**

stavový index s	c b a	funkční hodnota $f(c,b,a)$	minterm P_s	maxterm S_s
0	0 0 0	0	$\bar{c}\bar{b}\bar{a}$	$c+b+a$
1	0 0 1	1	$\bar{c}\bar{b}a$	$c+b+\bar{a}$
2	0 1 0	1	$\bar{c}b\bar{a}$	$c+\bar{b}+a$
3	0 1 1	0	$\bar{c}ba$	$c+\bar{b}+\bar{a}$
4	1 0 0	1	$c\bar{b}\bar{a}$	$\bar{c}+b+a$
5	1 0 1	0	$c\bar{b}a$	$\bar{c}+b+\bar{a}$
6	1 1 0	1	$cb\bar{a}$	$\bar{c}+\bar{b}+a$
7	1 1 1	0	cba	$\bar{c}+\bar{b}+\bar{a}$

Pravdivostní tabulka se všemi mintermy a maxtermy

- **UNDF:** $f(c,b,a)=\bar{c}\bar{b}a+\bar{c}b\bar{a}+c\bar{b}\bar{a}+cb\bar{a}$
- **UNKF:** $f(c,b,a)=(c+b+a)\cdot(c+\bar{b}+\bar{a})\cdot(\bar{c}+b+\bar{a})\cdot(\bar{c}+\bar{b}+\bar{a})$
- **Seznam stavových indexů (zkrácený tabulkový tvar):**

$$f(c,b,a)=\Sigma(1,2,4,6)=\Pi(0,3,5,7)$$

- UNDF obsahuje tolik mintermů, kolik je počet vstupních písmen, pro které nabývá uvažovaná logická funkce hodnoty 1
- UNKF obsahuje tolik maxtermů, kolik je počet vstupních písmen, pro které nabývá uvažovaná logická funkce hodnoty 0

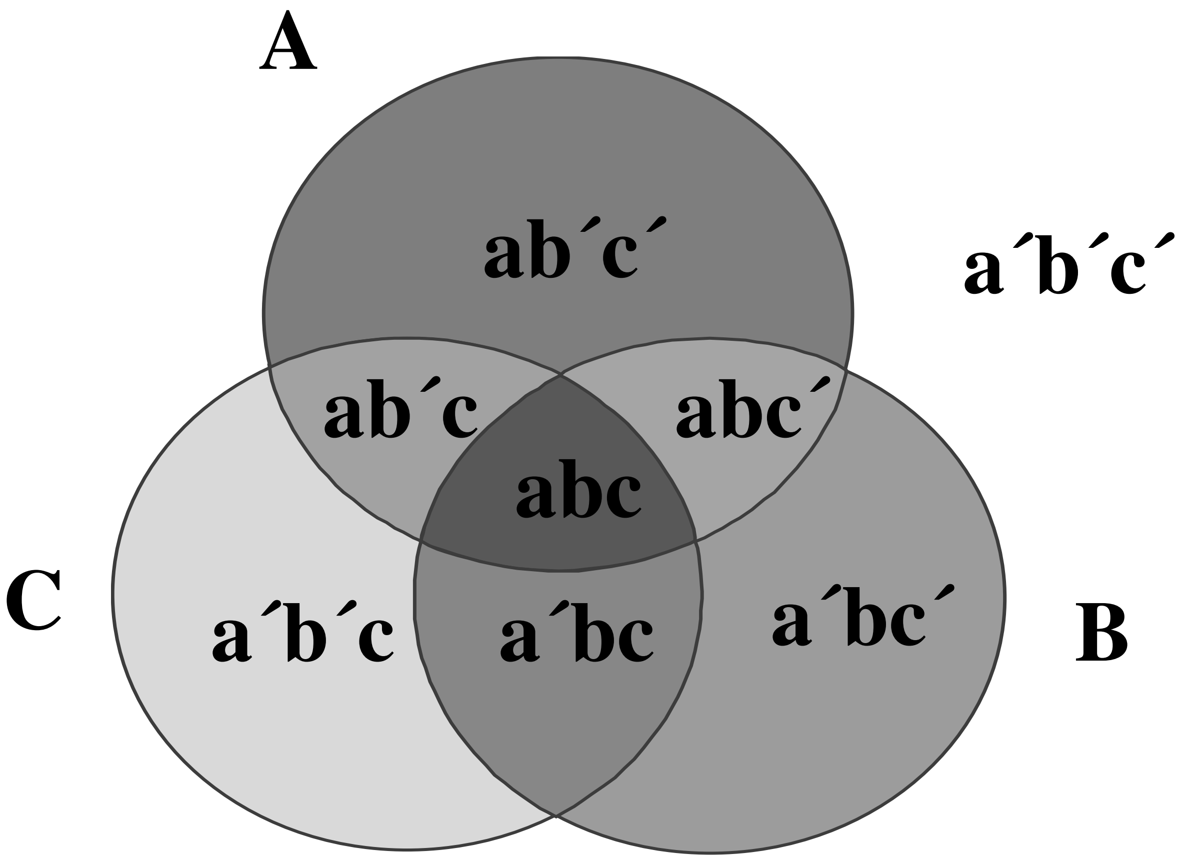
- Vytvoření UNDF z UNKF - roznásobením
- UNKF z UNDF
  - určíme doplněk množiny mintermů s hodnotou 1
  - pro příslušná vstupní písmena určíme maxtermy
  - UNKF je součin těchto maxtermů

- **Algebraické výrazy nabývají řady forem, které nejsou čistě disjunktivní nebo konjunktivní. Nazýváme je *smíšené* formy.**

- **Disjunktivní nebo konjunktivní formou můžeme popsat všechny výrazy - používá se pro minimalizaci**

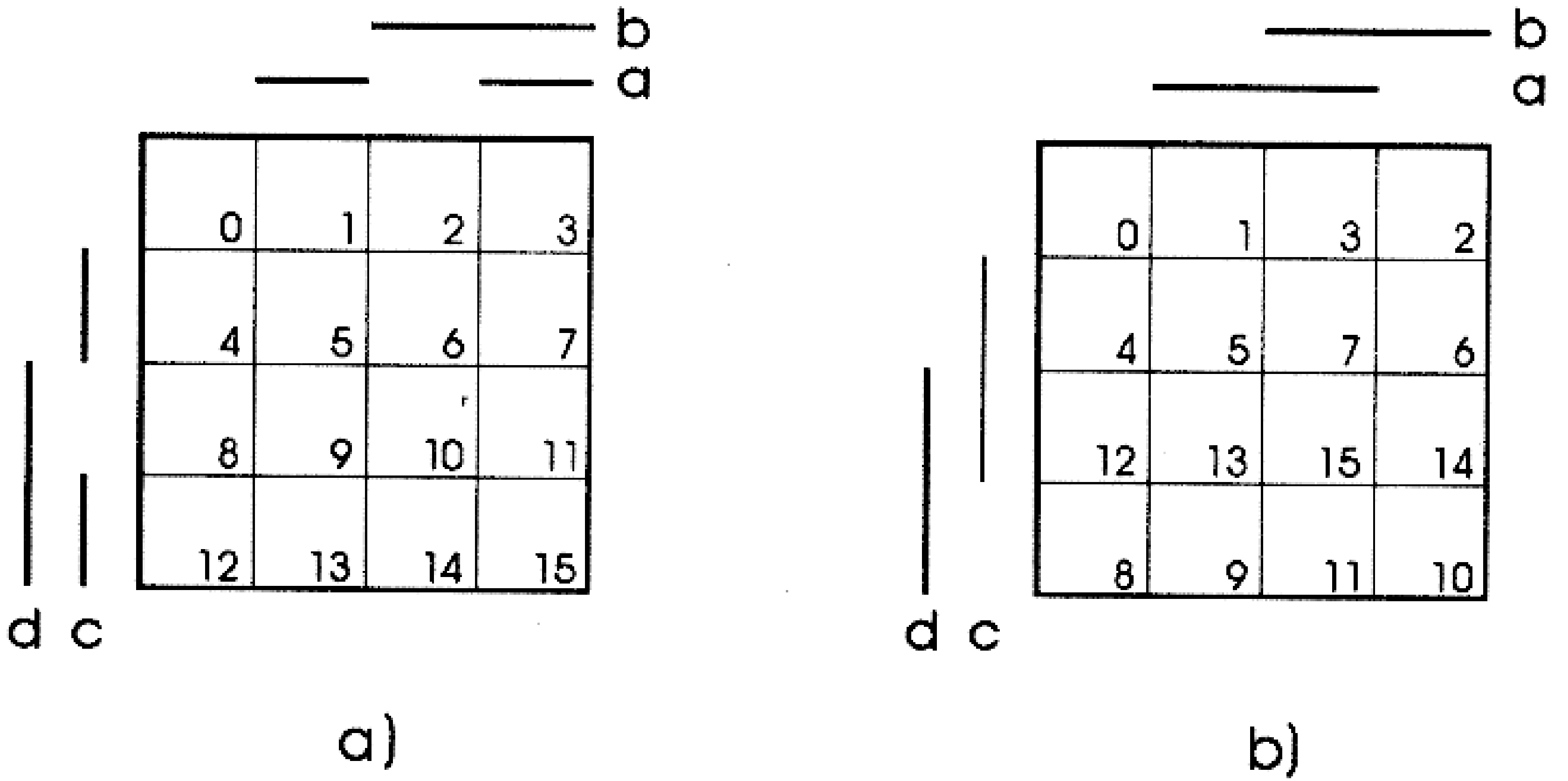
- **Tyto formy lze snadno transformovat do Shefferovy algebry (samé NANDy) nebo Pierceovy algebry (samé NORy)**

Vénovy diagramy

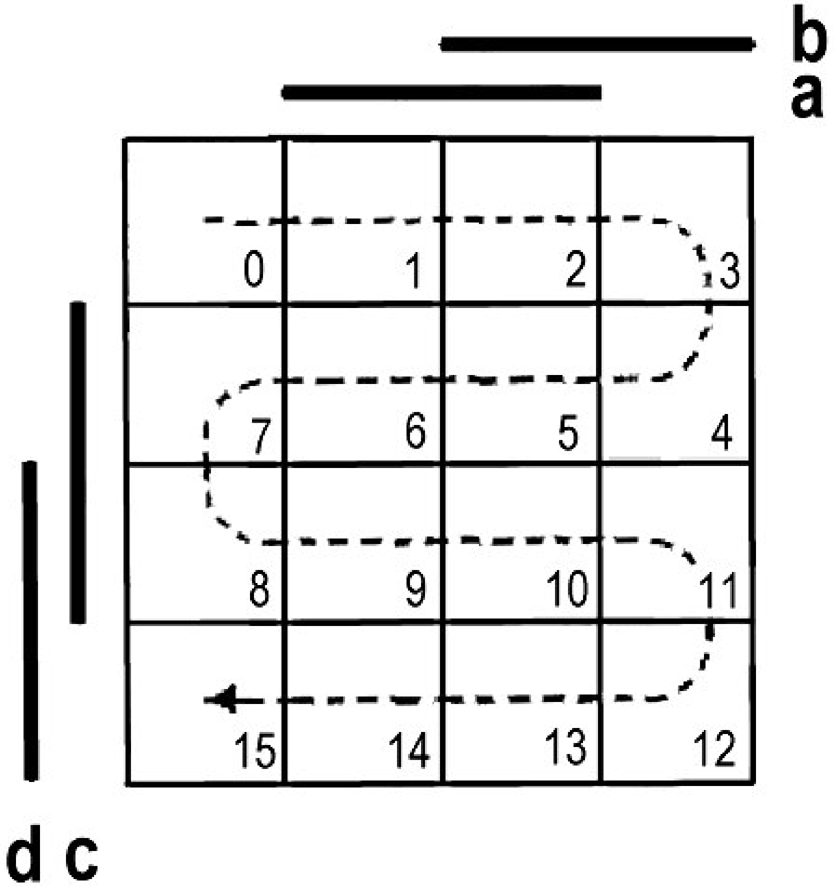


- **Mapa je Vénův diagram, kde jednotlivé oblasti mají tvar obdélníků**

Mapy

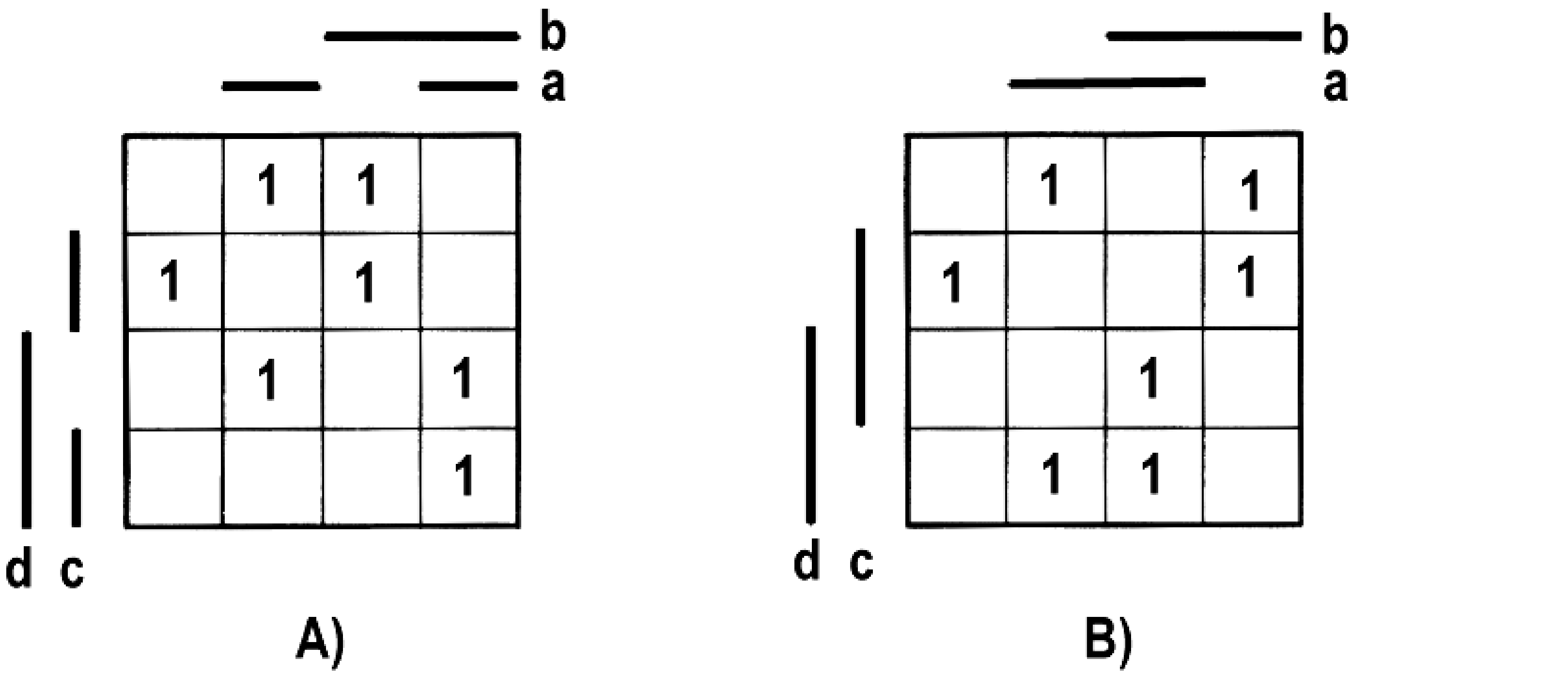


a)Svobodova mapa, b)Karnaughova mapa



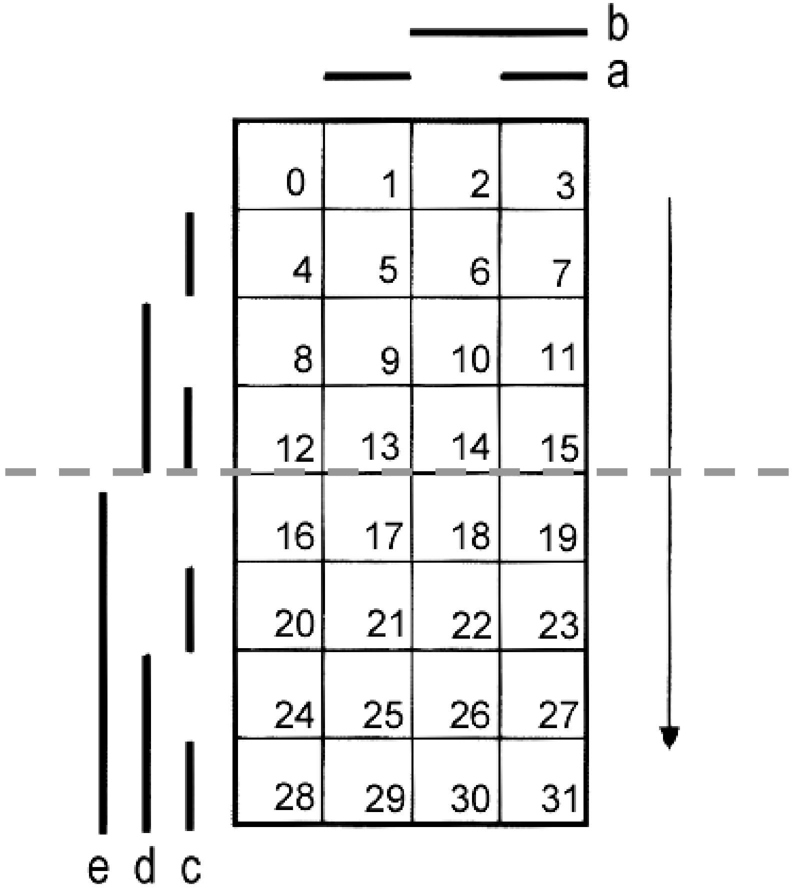
	d	c	b	a
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	1
3	0	0	1	0
4	0	1	1	0
5	0	1	1	1
6	0	1	0	1
7	0	1	0	0
8	1	1	0	0
9	1	1	0	1
10	1	1	1	1
11	1	1	1	0
12	1	0	1	0
13	1	0	1	1
14	1	0	0	1
15	1	0	0	0

Tabulka Grayova kódu

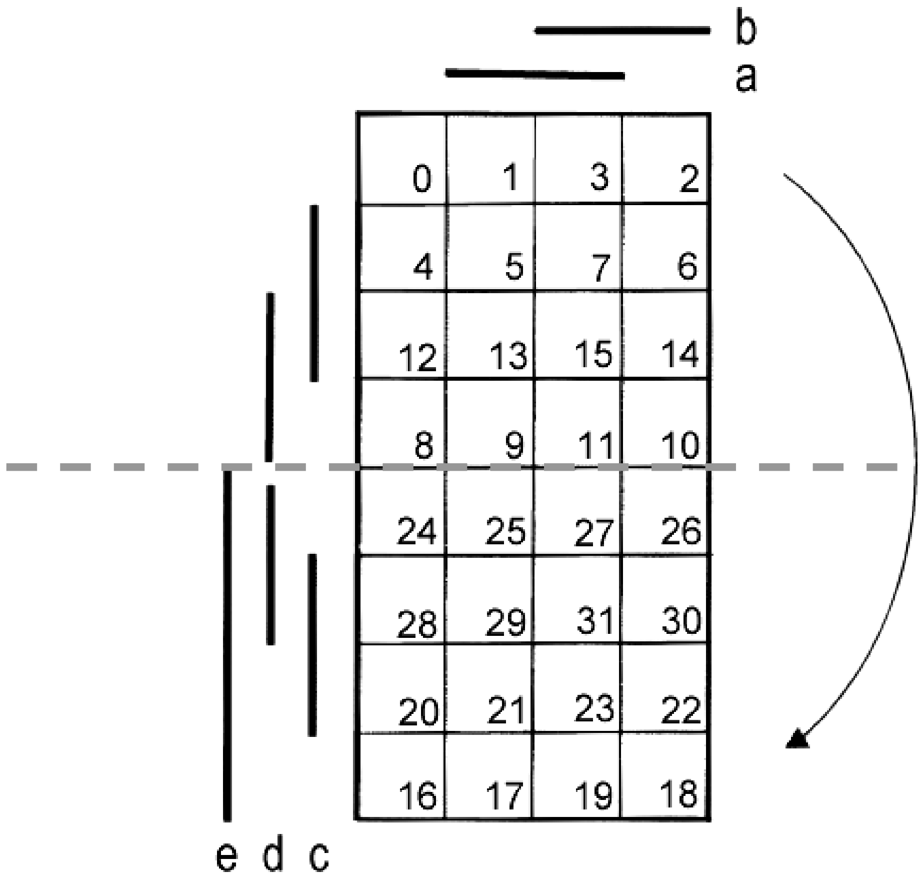


2.2 Zobrazení funkce f A) ve Svobodově mapě B) v Karnaughově mapě

Rozšíření Svobodovy a Karnaughovy mapy



A)



B)