Booleova algebra

Logické proměnné a logické funkce

- Logická proměnná je veličina, která může nabývat pouze dvou hodnot, označených 0 a I (tedy dvojková proměnná) a nemůže se spojitě měnit
- Logická funkce *n* proměnných x_1, x_2, x_3,… x_n je funkce, která může nabývat, stejně jako všechny logické proměnné, pouze dvou hodnot

Logické proměnné a logické funkce

- Funkce rovnosti platí, když dvě logické proměnné A , B se sobě rovnají, tzn. , jestliže A = I , B = I nebo A = 0 , B = 0 , což zapisujeme A = B
- Dvě veličiny A = $a_1, a_2, a_3, \ldots\ a_n$; B = $b_1, b_2, b_3, \ldots\ b_n$ se sobě rovnají, když platí $a_i = b_i$ pro všechna i.

V Booleově algebře jsou definovány tři základní operace

- Logická negace $\overline{0} = I$

  $\overline{I} = 0$

- Logický součin $Y = A \cdot B$

- Logický součet $Y = A + B$

Zákony a pravidla Booleovy algebry

- Komutativní zákon

$$A + B = B + A$$
$$A \,.\, B = B \,.\, A$$

- Asociativní zákon

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$
$$A \,.\, (B \,.\, C) = (A \,.\, B) \,.\, C$$

- Distributivní zákon

$$A + B \,.\, C = (A + B) \,.\, (A + C)$$
$$A \,.\, (B + C) = A \,.\, B + A \,.\, C$$

Zákony a pravidla Booleovy algebry

- Zákon o agresívnosti prvku I a O

$$A + I = I$$
$$A \,.\, 0 = 0$$

- Zákon o neutrálnosti prvku I a O

$$A + 0 = A$$
$$A \,.\, I = A$$

- Zákon o vyloučení třetího

$$A + \overline{A} = I$$
$$A \,.\, \overline{A} = 0$$

- Zákon dvojité negace

$$\overline{\overline{A}} = A$$

Zákony a pravidla Booleovy algebry

- Zákon absorpce

$$A + A = A$$

$$A \,.\, A = A$$

$$A + A \,.\, B = A$$

$$A \,.\, (A + B) = A$$

Zákon absorpce negace

$$A + \overline{A} = I$$

$$A \,.\, \overline{A} = 0$$

$$A + \overline{A} \,.\, B = A + B$$

$$A \,.\, (\overline{A} + B) = A \,.\, B$$

$$\overline{A} + A.B = \overline{A} + B$$

$$\overline{A}(A + B) = \overline{A}.B$$

De Morganův zákon

$$\overline{A + B + C + \ldots} = \overline{A} \,.\, \overline{B} \,.\, \overline{C} \,.\; \ldots$$

$$\overline{A \,.\, B \,.\, C \,.\; \ldots} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \ldots$$

- negaci funkce získáme nahrazením každé proměnné její negací a záměnou značek součtu a součinu navzájem

$$A + B \,.\, C = A + (B \,.\, C)$$

Tedy :

$$\overline{A + B \,.\, C} = \overline{A} \,.\, (\overline{B} + \overline{C})$$

a neplatí :

$$\overline{A \,.\, B} + \overline{C}$$

Definice logické funkce

- Pravdivostní tabulkou
  - Pravdivostní tabulka je tabulka , do které se zapisuje logická (Booleovská funkce) . Pravdivostní tabulka má r+n sloupců a 2^n řádků . Číslo r je počet sloupců výsledných funkcí (obyčejně bývá jedna výsledná funkce – tedy jeden sloupec). Číslo n udává počet proměnných. Číslo 2^n udává počet všech možných kombinací proměnných, kde číslo n je počet proměnných. Tyto kombinace reprezentuje počet řádků .
- Zápisem logické funkce
  - úplné disjunktivní normální formy – ÚDNF
  - úplné konjunktivní normální formy – ÚKNF

Úplně zadaná funkce

- Logická funkce je úplně zadaná , jestliže je známa její hodnota I nebo 0 pro všechny možné kombinace hodnot proměnných

A	B	C	f
0	0	0	0
0	0	I	I
0	I	0	I
0	I	I	0
I	0	0	0
I	0	I	I
I	I	0	0
I	I	I	I

Neúplně zadaná funkce

- Logická funkce je neúplně zadaná , když její hodnota pro některé kombinace hodnot proměnných je libovolná nebo není určena

A	B	C	f
0	0	0	0
0	0	I	I
0	I	0	X
0	I	I	0
I	0	0	X
I	0	I	I
I	I	0	0
I	I	I	X

Logická funkce n-proměnných

- Logická funkce f_n n-proměnných nabývá všech možných hodnot, pro všechny možné kombinace n-proměnných .
- Počet funkcí je $(2^2)^n$

Funkce jedné proměnné

A	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	I	I
I	0	I	0	I

- konstanty $f_0 = 0$ a $f_3 = I$
- proměnná sama $f_1 = A$
- negace proměnné $f_2 = \overline{A}$

Funkce dvou proměnných

A	B	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	I	I	I	I	I	I	I	I
0	I	0	0	0	0	I	I	I	I	0	0	0	0	I	I	I	I
I	0	0	0	I	I	0	0	I	I	0	0	I	I	0	0	I	I
I	I	0	I	0	I	0	I	0	I	0	I	0	I	0	I	0	I

Funkce dvou proměnných

- součet modulo 2 $A \oplus B$ $f_6 = A\overline{B} + \overline{A}B$
- ekvivalence $A \otimes B$ $f_9 = AB + \overline{A}\,\overline{B}$
- Piercova funkce $f_8 = \overline{A}\,\overline{B} = \overline{A + B}$
- Schefferova funkce $f_{14} = \overline{A} + \overline{B} = \overline{AB}$
- inhibice $f_2 = A\overline{B}$
- Negace obrácené implikace $f_4 = \overline{A}B$
- Obrácená implikace $f_{11} = A + \overline{B}$
- Implikace $f_{13} = \overline{A} + B$

Úplná disjunktivní normální forma

- ÚDNF – je to součet základních součinů přímých nebo negovaných proměnných . Každý základní součin (minterm – z ang. minimal polynomial term) nabývá hodnoty I pro určitou kombinaci, kdy funkce má hodnotu I a hodnoty 0 pro všechny ostatní kombinace. ÚDNF vyjadřuje funkci jako součet případů, kdy má hodnotu I.

Úplná konjunktivní normální forma

- ÚKNF – je to součin základních součtů přímých nebo negovaných proměnných . Každý základní součet nabývá hodnoty 0 pro určitou kombinaci, kdy funkce má hodnotu 0 a hodnoty I pro všechny ostatní kombinace. ÚKNF vyjadřuje funkci jako součin případů, kdy má hodnotu 0.

Výpis logických funkcí z pravdivostní tabulky

A	B	C	f
0	0	0	I
0	0	I	0
0	I	0	I
0	I	I	0
I	0	0	I
I	0	I	0
I	I	0	I
I	I	I	0

$$f = \overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C} + \overline{A}\ B\ \overline{C} + A\ \overline{B}\ \overline{C} + A\ B\ \overline{C}$$

$$f = (A+B+\overline{C}).(A+\overline{B}+\overline{C}).(\overline{A}+B+\overline{C}).(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

Karnaughova mapa

A

I	0	0	I	B
I	0	0	I	

C

A	B	C	f
0	0	0	I
0	0	I	0
0	I	0	I
0	I	I	0
I	0	0	I
I	0	I	0
I	I	0	I
I	I	I	0

$$f = \overline{C}$$

Zjednodušování zápisu logické funkce

- Algebraická minimalizace
  – upravování logického výrazu podle zákonů a pravidel Booleovy algebry
- Grafická – Karnaughova metoda
  – Pro zjednodušení funkce pomocí algebraické minimalizace spojujeme součiny (mintermy) , které se liší v jediné proměnné

Algebraická minimalizace

A	B	f
0	0	I
0	I	0
I	0	I
I	I	I

$$f = \overline{A}\,\overline{B} + A\overline{B} + AB$$

$$f = \overline{A}\,\overline{B} + A\overline{B} + AB = A(B + \overline{B}) + \overline{A}\ \overline{B} = A + \overline{A}\ \overline{B} = A + \overline{B}$$

Minimalizace logická funkce

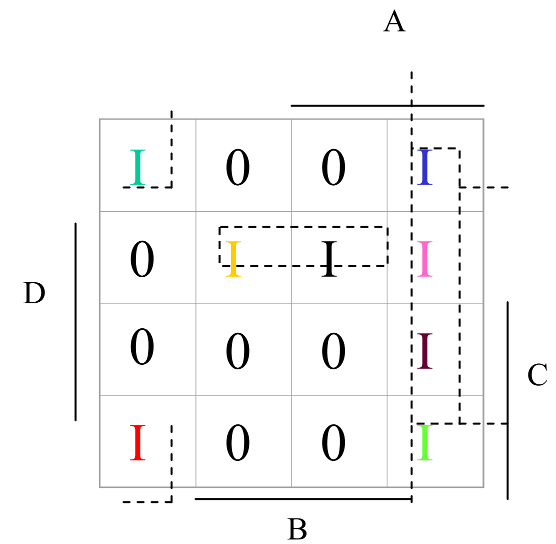
- V Karnaughově mapě vytváříme **podmapy**
- Podmapou rozumíme sjednocení 2^k sousedních stavů, ve kterých nabývá logická funkce hodnoty 1 pro k = 0, 1, 2, ... , n-1
- Každou podmapou vyloučíme k proměnných z dvou, čtyř až 2^{n-1} základních součinů
- Snažíme se vytvářet co největší podmapy, abychom vyloučili co největší počet proměnných
- Využíváme k tomu také **neurčité stavy**

Pravidla vytváření podmap

- vybranými podmapami musí být pokryty všechny jednotkové stavy logické funkce,
- do podmapy spojujeme stejné stavy, které spolu sousedí hranou, a to i přes okraje mapy. Rohy mapy jsou též sousedními stavy. Členy dvou sousedních polí se od sebe liší jednou proměnnou a tuto proměnnou můžeme vyloučit,
- podmapu pravidelného tvaru (čtverec, obdélník) vytváříme co největší, aby se ze skupiny stavů vyloučilo co nejvíce proměnných,
- podmapy se mohou prolínat,
- nevytváříme zbytečné podmapy, tzn. že nespojujeme ty stavy, které už byly předtím pokryty jinou podmapou,
- čím větší bude podmapa, tím jednodušší bude výsledný výraz

Zjednodušení úplně zadané funkce

A	B	C	D	f
0	0	0	0	I
0	0	0	I	0
0	0	I	0	I
0	0	I	I	0
0	I	0	0	0
0	I	0	I	I
0	I	I	0	0
0	I	I	I	0
I	0	0	0	I
I	0	0	I	I
I	0	I	0	I
I	0	I	I	I
I	I	0	0	0
I	I	0	I	I
I	I	I	0	0
I	I	I	I	0



$$\overline{A}\,B\,\overline{C}\,D + A\,B\,\overline{C}\,D = B\,\overline{C}\,D\,(\overline{A} + A) = B\,\overline{C}\,D$$

$$A\,\overline{B}\,\overline{C}\,(D + \overline{D}) + A\,\overline{B}\,C\,(D + \overline{D}) = A\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,C = A\,\overline{B}\,(\overline{C} + C) = A\,\overline{B}$$

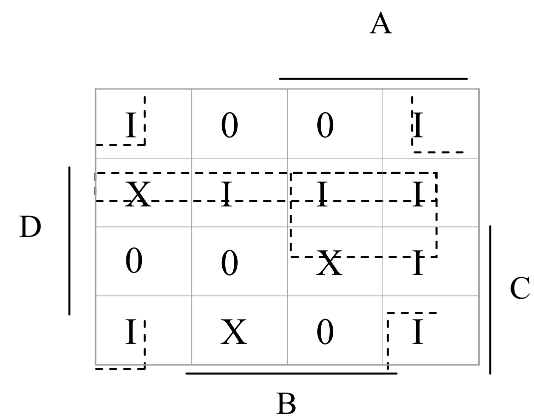
$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D}\,(\overline{C} + C) + A\,\overline{B}\,\overline{D}\,(\overline{C} + C) = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D} + A\,\overline{B}\,\overline{D} = \overline{B}\,\overline{D}\,(\overline{A} + A) = \overline{B}\,\overline{D}$$

$$f = B\,\overline{C}\,D + A\,\overline{B} + \overline{B}\,\overline{D}$$

$$f = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D} + \overline{A}\,B\,\overline{C}\,D + A\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}D + A\,\overline{B}\,C\,\overline{D} + A\,\overline{B}\,C\,D + A\,B\,\overline{C}\,D$$

Zjednodušení neúplně zadané funkce

A	B	C	D	f
0	0	0	0	I
0	0	0	I	X
0	0	I	0	I
0	0	I	I	0
0	I	0	0	0
0	I	0	I	I
0	I	I	0	X
0	I	I	I	0
I	0	0	0	I
I	0	0	I	I
I	0	I	0	I
I	0	I	I	I
I	I	0	0	0
I	I	0	I	I
I	I	I	0	0
I	I	I	I	X



$$f = \overline{B}\,\overline{D} + \overline{C}D + AD$$

Příklad

- Chceme určit logickou funkci zařízení které:
  - rozsvítí zelenou žárovku – F1, když v nějakém výrobním procesu překročí kritickou hodnotu pouze jedna ze sledovaných veličin, např. tlak (x), nebo teplota (y), nebo vlhkost (z), nebo žádná,
  - rozsvítí červenou žárovku - F2, když je překročena kritická hodnota kterýchkoli dvou veličin současně,
  - zapne sirénu - F3, když jsou překročeny kritické hodnoty všech tří veličin současně.

Příklad

x	y	z	F1	F2	F3
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1

$$F1 = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}\bar{z}$$

$$F2 = \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z}$$

$$F3 = xyz$$