Kombinatorika

Máme n mužů a n žen:

26. 5. 2009

a

kolika způsoby lze vytvořit řadu, aby žádné 2 ženy nestály vedle sebe

řešení

Postavime zeny do rady, moznost je n!. Muze postavime do rady, je to n!. Pak rada muze zacinat muzem, nebo zenou. Proto ×2.

Pak druhá část: Řada může začínat i končit ženou Př. na třech:

Ž M M Ž M Ž

ženy lze umístit do n! míst, muže taky. U nich je ale nutné vybrat místo, kde budou dva vedle sebe. Proto ještě násobíme (n-1).

Protože obě množiny jsou disjunkní, tak je sečteme.

b

kolika způsoby lze posadit lidi kolem stolu, aby žádné 2 ženy neseděly vedle sebe

řešení

To, co napsal Tišer, je všeříkající. Ženy můžeme posadit (n-1)! způsoby. Pak nám mezi nima zbyde n míst a na ty usadíme n mužů. Tady už nejsou zobrazení vzniklá pootočením mužů stejná - každý by pak seděl vedle jinejch žen, proto n!.

Relace

Máme relaci R na množině N

mRn, pokud aspoň tři z čísel m, n, (m+n), (m-n) jsou dělitelné 3ma

a

je relace R reflexivní, symetrická tranzitivní?

b

Zjistěte všechny dvojice (m,n) tak, že mRn

řešení

m a n musí být dělitelná třemi. Pokud jsou dělitelná třema, pak i jejich součet je dělitelnej třema. (Kdo rekl, ze m a n musi byt delitelne 3ma? Podle me je to tak, ze bud mam trojici kde je m i n a tim padem 3|m a 3|n a pak taky jejich soucet a podil. A nebo mam trojici kde je **bud** m **nebo** n a pak soucet a rozdil s n pripadne s m ktery musi byt take delitelny a tim padem i n je delitelne. Jinymy slovy at vyrobime jakoukoliv 3jici vzdy budou delitelne vsechny ctyri cleny. A taky teda m a n musi byt delitelne trema, ale jasny na prvni pohled mi to nepride.)

Představte si, že máte číslo x a y. m = 3x, n = 3y. A můžete směle dělit :) m+n = 3x+3y = 3(x+y). Pak i m-n = 3x-3y = 3 (x-y) je dělitelný třema. Snad to všichni chápou.

a co je tohle za reseni? kto dokaze ze to neni reflexivni ... sak kdyz vemu 3R3 tak (3+3 = 6) a to sedi a i kdyz vemu 0R0 (0+0 = 0) je delitelne 3ma. :(

Výroková logika

(ten latex mi nějak nefunguje, dyžtak to někdo opravte...)

Je **!P** konsekventem ?

{(!P a Q) => R; !P => (Q a T); R => (T a (S nebo T))}

Nelze pochopit (neznámá chyba): (\lnot P \land Q) \Rightarrow R, \lnot P \Rightarrow (Q \land T), R \Rightarrow (T \land (S \lor T))

řešení

Prvni dve prevedeme implikace na disjunkce jednoduse (a => b je totez co !a v b)

Ve tretim vyroku je T a (S v T) pripadem absorbce, cili je to totez, co T. Tim se to velmi zjednodusi a muzeme na rezolucni metodu.

Takze se to rozpadne na 3 vyroky:

PvQvR ; Pv(Q^T); !RvT

Az potud souhlasim, ale prvni vyrok vyjde: *P v !Q v R* **protoze :** *(!P a Q)=> R = !(!P a Q) v R = (De Morgan) = (P v !Q) v R = P v !Q v R*

prvni a posledni jsou OK, ale druhy musime jeste podle CNF a vyjde: PvQ a PvT (takze se rozpadl na 2) ? spravne ? **To sedi**

vysledne sestaveni formuli je tedy:

P v !Q v R **;** P v Q **;** P v T **;** !R v T **spravne**

a z toho rezolucni metodou zjistime, zda je to spravne?

Rezolucni metoda:

Zapiseme si vyroky do tabulky, *vcetne* NEGACE testovaneho konsekventu a postupne vyrazujeme dvojice literal+negace [Demlova : prednaska 7 - tabulky 3.1. a 3.2.]

Zaver:

jak poznam ze je !P konsekventem?

Fail - samozrejme az po zkousce jsem zjistil, ze se do tabulky vklada negace zkouseneho konsekventu.

(takze "P" je konsekventem ale "!P" neni? mozna jen spatne chapu konsekvent)

```
alfa je konsekventem S |= alfa, prave tehkdy kdyz je S sjednoceno {~alfa} nesplnitelna.
Takze vezmes mnozinu S, znegujes alfu a udelas rezolucku. Pokud vyjde jako splnitelna pak neplati S |=
Skripta Demlova str. 56, Tvrzeni 6.1.5.
```

Predikátová logika

a

Pomocí uvedených predikátů a konstantních symbolů formulutje v predikátovém počtu s rovností:

Jsou-li opery Aida a Don Jovani stejně dlouhé, pak delší je pouze prodaná nevěsta.

a .. Aida

d .. Don Jovani

p .. Prodaná nevěsta

O(x) .. x je opera

D(x,y) .. x je aspoň stejně tak dlouhé jako y

Tohle je řešeni: (ale doby kdy jsem 100% vedel co je ktery znak jsou davno pryč tak si to vyložte po svém.

foto výroku na tabuli (http://sog.sweb.cz/MLO_vyrok.png) :D pekny, prectete to nekdo?

b

Pomocí aritmetických symbolů x,+,-,:, závorek, kvantifikátorů a logických spojek (žádné jiné symboly nejsou k dispozici) formalizujte v univerzu celých čísel následující výrok:

Je-li číslo dělitelné dvěma různými čísly, pak je dělitelné i součinem těchto čísel.

Kdo ví co

a

Definujte Souvislý graf, Eulerův graf

Souvislý graf G je Eulerův právě, když všechny stupně jsou sudé, nebo s jedinou možnou vijímkou dvou vrcholů.

To není definice, to je věta. Definice Eulerova grafu je: Eulerův graf je takový graf, ve kterém existuje tah obsahující všechny hrany.

Souvislý graf je takový graf, kde pro každé dva vrcholy existuje cesta, která je spojuje.

b) **Dokažte, že ZxZxZ je spočetná**

To je easy celkem, (ve skrpitech je důkaz) ale dokážeme, že Z je spočetná, pomocí toho že jí seřadíme do posloupnosti (kladná čísla na 2n-1 pozicích a záporná na 2n pozicích), no a z další víme, že kartéský součin dvou spočetných množin je spočetná množina a tadáá CBD. (U toho kartéskýho součinu je ten důkaz takový, že si ty prvky opět seřadíme do posloupnosti => je spočetný)!

Stručné řešení

1. (a) počet řad, kde se střídá muž a žena je $2n!\,n!$. V řadě mohou stát na jednom místě dva muži vedle sebe a zbytek je střídavý. Počet pozic dvojice mužů je $n-1$. Dohromady je výsledek

$$2(n!)^2 + (n-1)(n!)^2 = (n+1)(n!)^2.$$

(b) Počet způsobů rozesadit ženy kolem stolu, aby mezi nimi bylo volné místo je $(n-1)!$. Do volných míst je možné rozmístit muže $n!$ způsoby. Tedy počet možností je $(n-1)!\,n!$.

2. (a) Relace není reflexivní, je symetrická a je tranzitivní.
(b) $m\,R\,n$ právě, když obě čísla jsou dělitelná třemi.

3. $\neg P$ není důsledkem množiny formulí.

4. (a) $D(a,d) \wedge D(d,a) \Rightarrow \Big(\forall x\ O(x) \wedge \neg D(a,x) \Rightarrow (x = p)\Big)$
(b) $\forall x\Big(\exists y \exists z \exists u \exists v\ (x = y \times u) \wedge (x = z \times v) \wedge \neg(y = z) \Rightarrow \exists t\ (x = t \times (y \times z)\Big).$

kombinatorika

2.6.2010

Máme *n* modrých a *n* bílých míčků.
a) Kolika způsoby je lze rozdělit do dvou misek tak, aby na každé bylo právě *n* míčků? Misky nerozlišujeme.

b) Bílé míčky jsou očíslovány čísly 1,...,n a modré míčky rovněž čísly 1,...,n. Kolik je nyní způsobů rozdělení do dvou misek po *n* míčkách? Opět misky nerozlišujeme.

nevite nekdo vzorce?

relace

Nechť *R* je relace na množině **Z** celých čísel definovaný předpisem

x R y, právě když x-y je sudé číslo dělitelné pěti.

a) Ukažte, že *R* je ekvivalence na **Z**.
b) Dokažte, že pro každé *n* náležící **Z** platí *n^5 R n*.

vyrokova logika

Pomocí rezoluční metody rozhodněte, zda

{(P ^ Q) => R, T v Q, Q v ~S, R <=> Q} |= (R^T) => Q

{(P ^ Q) => R, T v Q, Q v ┐S, R <=> Q} |= (R^T) => Q //pokud před tím S je to negace tak mi to vyšlo že M je log. důsledkem (R^T) => Q

vyslo vam taky ze ano ?--marenka 7. 6. 2010, 16:34 (UTC)

(leva strana napr. : t=1, s=0, q=0, p = lib, r= lib)

info: R <=> Q |=| (┐R v Q) ^ (R v ┐Q)

predikatova logika

a) Pomocí uvedených predikátů a konstant formalizujte následující výrok v predikátovém počtu s rovností.
Existují nejvýše dva kandidáti na krále Persie a Xerxes je jeden z nich.
K(x) ... kandidát na perského krále
k ... Xerxes

b) Pomocí artmetických symbolů x,+,-,:, závorek, kvantifikátorů a logických spojek (žádné jiné symboly nejsou k dispozici) formalizujte v univerzu celých čísel následující výrok:
Součet čtverců jakýchkoliv dvou různých čísel je vždy lichý.

5. a) Definujte pojem **Formule** v predikátovém počtu. b) Dokažte, že v každém grafu je součet stupňů všech vrcholů v grafu je sudé číslo.

Stručné řešení

1. (a) Dívejme se na složení míčků jedné misce: Je-li n sudé, pak možných rozdělení je $\frac{1}{2}n+1$: (počet bílých, počet modrých) $= (0,n), (1,n-1), \dots (\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}n)$.
Je-li n liché, pak možných rozdělení je $\frac{1}{2}(n+1)$:
(počet bílých, počet modrých) $= (0,n), (1,n-1), \dots (\frac{1}{2}(n-1), \frac{1}{2}(n+1))$.
Souhnně to lze napsat $[\frac{1}{2}n]+1$.

(b) Jsou-li míčku očíslovány, vybíráme vlastně z $2n$ míčků n, dáme je ma první misku a zbytek na druhou. Počet takových výběrů je $\binom{2n}{n}$. Protože misky nerozlišujeme, vždy dvě rozdělení splývají (prohození misek), takže správný výsledek je $\frac{1}{2}\binom{2n}{n}$.

2. (a) Relace je reflexivní, neboť 0 je sudé číslo dělitelné pěti. Je symetrická, neboť je-li $x-y$ sudé číslo dělitelné pěti, pak i $y-x$ sudé číslo dělitelné pěti. Je tranzitivní, neboť, je-li $x-y$ sudé číslo dělitelné pěti a $y-z$ sudé číslo dělitelné pěti, pak jejich součet musí být opět sudé číslo dělitelné pěti a zároveň je to $x-z$.
(b) Jedna možnost je důkaz indukcí, že n^5-n je vždy sudé číslo dělitelné pěti.

3. $(R \wedge T) \Rightarrow Q$ je důsledkem množiny formulí.

4. (a) $K(k) \wedge \Big(\forall x\ \forall y\ K(x) \wedge K(y) \Rightarrow (x=k) \vee (y=k)\Big)$
(b) $\forall x \forall y \exists z\ \neg(x=y) \Rightarrow \neg(x \times x + y \times y = z + z)$.

kombinatorika

9. 6. 2010

Něco ve smyslu "házíme n kostkami **současně**"
a) 1)Kolika způsoby pokud kostky rozlišujeme může vrh dopadnout.
2)Kolika způsoby dopadně 1) pokud vyřadíme hody se všude stejným výsledkem (tj na všech kostkách současně padne 1, nebo 2, nebo 3, ... , 6)

b) kolika způsoby hod dopadne, když kostky nerozlišujeme

relace

Byla zadána 5ti prvková množina M{a,b,c,d,e} a na M x M se mělo

a) najít takovou relaci, která neni reflexivní, symetrická ani tranzitivní
b) zjistit kolik takových relací může existovat.

vyrokova logika

jeden priklad na rezolucni metodu ve vyrokove logice, zjistit zda mnozina formuli M |= P (nejakou jinou).

(mozne reseni je prevest vsechny formule z mnoziny M na CNF, P znegovat a taky prevest na cnf. Vse zapsat do tabulky na rez. metodu a pokud vyjde nekde kontradikce (FF), pak M |= P plati.)

namate nekdo toto zadani?

ja mam jen cast :/

...Q)=>R

P=>!R

Q=>(!Pv!R)

|=

P^Q

--marenka 21. 6. 2010, 17:10 (UTC)

predikatova logika

a), b) stejne jako pri jinych pisemkach z 2009/2010, jen lehce jine zadani

(poznamka k formalizaci vyrokove logiky, nesmi se pouzivat cislice a kdyz mam nejak vyjadrit sude cislo, tak se to dela tak ze "existuje z" a pak sude cislo je "(z + z)" (soucet dvou stejnych cisel je vzdy sudy.. aspon teda myslim))

teorie

a) Příklad na grafy, něco s vrcholy, jako "kolik minimálně hran může mít graf s n vrcholy, dokažte"
b) asi je to špatně, ale něco jako "Dokažte, že k jakékoliv existující klausuli výrokové logiky lze přiřadit nějakou formuli ve výrokové logice"... ?

Citováno z „http://stm-wiki.cz/index.php/Y01MLO_-_Zkou%C5%A1ka_-_9.6.2010“

Stručné řešení

1. (a) Na kostce je 6 možností, co může padnout. Počet výsledků je tedy 6^n. Konstantních výsledků je 6, takže nekonstantních je $6^n - 6$.

   (b) Zde je výsledek hodu n kostkami údaj, že padlo x_1 jedniček, x_2 dvojek,... a x_6 šestek. Protože $x_1 + \cdots + x_6 = n$, je počet výsledků $\binom{n+6-1}{6-1} = \binom{n+5}{5}$.

2. (a) Relace splňující požadavky je relace typu $R = \{(a,b),(b,c)\}$ obsahující jen dvě dvojice.
   (b) Počet takových relací je roven počtu způsobů, jak vybrat postupně tři různé prvky z množiny M, což je $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

3. $\neg P \vee \neg Q$ je důsledkem množiny formulí.

4. (a) Nejkratší zápis je $\forall x\ (V(x) \Rightarrow (x = n))$
   (b) $\forall x \Big(\exists y\ (x = y + y) \Rightarrow (\exists u \exists v\ (x = u + v) \wedge \neg(u = v) \Big)$.

Matematická logika 5-10

22. 6. 2010

1. Z množiny čísel $\{1, 2, \ldots, n\}$ zvolíme čtyři čísla.

   (a) Kolik je takových výběrů, že největší ze zvolených čísel je alespoň 12?

   (b) Kolik je takových výběrů, že druhé největší ze zvolených čísel je alespoň 12?

2. Na množině všech n-prvkových podmnožin množiny $M = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ uvažujme relaci $\mathcal{R}$ definovanou předpisem

   n-prvkové množiny A, B jsou v relaci $\mathcal{R}$ právě když $A \cap B \neq \emptyset$.

   (a) Jaké z vlastností reflexivita, symetrie, antisymetrie a tranzitivita má relace $\mathcal{R}$?

   (b) Je-li $A \subset M$ daná n-prvková množina, pro kolik množin $B \subset M$ platí $A\ (\mathcal{R} \circ \mathcal{R})\ B$?

3. Pomocí rezoluční metody rozhodněte, zda

$$\{(\neg P \wedge Q) \Rightarrow R,\ \neg P \Rightarrow (Q \wedge T),\ R \Rightarrow (T \wedge (S \vee Q))\} \models Q \wedge T.$$

4. (a) Pomocí uvedených predikátů a konstant formalizujte následující výrok v predikátovém počtu s rovností:

   Slečna B obdivuje každého, kdo obdivuje sám sebe nebo slečna B obdivuje všechny, kdo obdivují ji.

   $O(x, z) \ldots x$ obdivuje y, $\qquad b \ldots$ slečna B

   (b) Pomocí aritmetických symbolů $\times, +, -, =$, závorek, kvantifikátorů a logických spojek (žádné jiné symboly jako 0, 1, atd. nejsou k dispozici) formalizujte v univerzu celých čísel:

   Existuje nejvýše jedno nenulové číslo.

5. (a) Definujte pojem **úplné párování** v bipartitním grafu.

   (b) Dokažte, že množina racionálních čísel je spočetná.

Stručné řešení

1. (a) Zjistíme počet výběrů, které dané podmínce nevyhovují a odečteme je od všech výběrů.

$$\binom{n}{4} - \binom{11}{4}.$$

(b) Podobně jako v (a) odečteme od všech výběrů ty, lteré nevyhovujé podmínce ze zadání.

$$\binom{n}{4} - \binom{11}{4} - \binom{11}{3}\binom{n-1}{1}.$$

2. (a) Relace je reflexivní a symetrická, ale není antisymetrická ani tranzitivní.
   (b) Každá množina A je v relaci $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}$, takže počet jejich počet je $\binom{2n}{n}$.

3. $Q \wedge T$ není důsledkem množiny formulí.

4. (a) $\Big(\forall x\ O(x,x) \Rightarrow O(b,x)\Big) \vee \Big(\forall x\ O(x,b) \Rightarrow O(b,x)\Big)$.
   (b) $\forall x \forall y \exists z \Big(\neg(x = z - z) \wedge \neg(y = z - z) \Rightarrow (x = y)\Big)$.