BÁZE

Vyšetřete, zda $B_1 = \{(2,0,-1,-2),(-1,1,0,2)\}$ a $B_2 = \{(0,2,-1,2),(3,1,-2,-2)\}$ jsou báze téhož lin. podprost. $V \subset R^4$. Výpočet podrobně zdůvodněte.

Musíme zjistit, zda $\langle B_1 \rangle = \langle B_2 \rangle$.

Pokud ano, musí platit

$\langle B_1 \rangle \subset \langle B_2 \rangle$ a současně $\langle B_2 \rangle \subset \langle B_1 \rangle$.

VARIANTA 1

Báze B1 a B2 jsou téhož lineárního podprostoru V tehdy, platí-li, že dimenze jejich spojení B1 v B2 je rovna 2, čili stejná, jako je báze B1 nebo B2.

Zprvu ověříte, zda jsou B1 a B2 skutečně báze - čili jestli jsou ty dva vektůrky v každé bázi skutečně lineárně nezávislé.

Pak už stačí hodit všechny vektory z obou bází do jedné matice a eliminovat. Zjistíte, že vám vypadnou dva řádky a dva zůstanou - dimenze je tedy 2 a příklad hotov.

VARIANTA 2

Porovnáme lin. kombinace bází:

$\alpha(2,0,-1,-2)+\beta(-1,1,0,2)=\gamma(0,2,-1,2)+\delta(3,1,-2,-2)$

Dostaneme 4 rovnice a vypočteme $\gamma$ a $\delta$:

$2\alpha - \beta = 0 + 3\delta$

$0 + \beta = 2\gamma + \delta \quad \Rightarrow \gamma = 2\beta - \delta = \dfrac{3\beta - 2\alpha}{2}$

$-\alpha + 0 = -\gamma - 2\delta \quad \Rightarrow \delta = \dfrac{2\alpha - \beta}{2}$

$-2\alpha + 2\beta = 2\gamma - 2\delta$

Dosadíme do zbylých dvou rovnic a provedeme kontrolní výpočet. Obě rovnice vyjdou $0=0$.

Báze $B_1$ a $B_2$ jsou báze téhož lin. podprost., protože $\langle B_1 \rangle = \langle B2 \rangle$.

# KOMUTUJÍCÍ MATICE



Určete bázi a dimenzi matic komutujících s maticí $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) zavedeme si komutující matici $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

b) spočteme A . B a B . A

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d & -e & -f \\ 2a & 2b & 2c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & -a & 0 \\ 2e & -d & 0 \\ 2h & -g & 0 \end{pmatrix}$$

c) porovnáme $\begin{pmatrix} -d & -e & -f \\ 2a & 2b & 2c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & -a & 0 \\ 2e & -d & 0 \\ 2h & -g & 0 \end{pmatrix}$

$-d = 2b$
$-e = -a$
$-f = 0$
$2a = 2e$
$2b = -d$ atd.

d) vyjádříme jednotlivé složky

$a = e$, $b = -\frac{d}{2}$, $c = 0$, $f = 0$, $g = 0$, $h = 0$, $i = ?$

e) sestavíme matici

$$\begin{pmatrix} a & -\frac{d}{2} & 0 \\ d & a & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \Rightarrow a, d, i \in R$$

f) množ. řešení $M = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

g) dim = 3, báze $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

# LIN. ZOBRAZENÍ



Určete bázi a dim jádra lin. zobr. $\mathcal{A}: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, pro které platí:

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4,\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4)$$

jádro $\quad \mathrm{Ker}\,\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^4;\ \mathcal{A}(x) = o\}$

$x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \qquad$ max. dim: $n - k$

$2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \qquad\qquad 4 - 2 = 2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \underline{\underline{\dim = 2}}$$

$x_3 = t \qquad 3x_2 = 5t \Rightarrow x_2 = \frac{5}{3}t$

$x_4 = r \qquad x_1 = 2 \cdot \frac{5}{3}t - 3t + r \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}t + r$

množ. řešení $M = \{(\frac{1}{3}t + r,\ \frac{5}{3}t,\ t,\ r)\}$

výpočet báze: $t(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, 1, 0)$

$\qquad\qquad\qquad r(1, 0, 0, 1)$

$B = \{(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\}$

---

Jsou dána lin. zobr. $\mathcal{A}\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a $\mathcal{B}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, pro která platí: $\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - 2x_3,\ -x_1 + 2x_2)$

$\qquad \mathcal{B}(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2,\ 2x_1 - x_2,\ x_1 + x_2)$

Rozhodněte, zda je $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ prosté (zdůvodněte). Pokud ano, najděte matici inverz. zobr. $(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})^{-1}$ vzhledem ke standard. bázím. Pokud ne, najděte bázi a dim jádra zobraz. $(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})$.

Prosté zobr. $= \forall x\ \mathbb{R}^3\ \exists$ právě jedno $x$ k $\mathbb{R}^2$.

Provedeme sjednocení proků. Za $\mathcal{B}(x_1, x_2)$ dosadíme $\mathcal{A}(x_1) = x_1 + x_2 - 2x_3$ a $\mathcal{A}(x_2) = -x_1 + 2x_2$.

$$\mathcal{B}\circ\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = \big(x_1 + x_2 - 2x_3 + 2(-x_1 + 2x_2),$$
$$2(x_1 + x_2 - 2x_3) - (-x_1 + 2x_2),\ x_1 + x_2 - 2x_3 + (-x_1 + 2x_2)\big)$$
$$= (\underbrace{-x_1 + 5x_2 - 2x_3}_{x_1},\ \underbrace{3x_1 - 4x_3}_{x_2},\ \underbrace{3x_2 - 2x_3}_{x_3})$$

Dosadíme do matice a zjistíme, kde je regulární:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & -2 & x_1 \\ 3 & 0 & -4 & x_2 \\ 0 & 3 & -2 & x_3 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$\dim$ jádra $= n - k$
$= 3 - 2 = 1$

matice není regulární (lze zjistit i přes determinant $\Rightarrow \det = 0$) $\Rightarrow (\mathcal{B}\circ\mathcal{A})$ není prosté

najdeme bázi:

$x_3 = t,\quad x_2 = \frac{2}{3}t,\quad x_1 = \frac{4}{3}t$

$M = \left(\frac{4}{3}t, \frac{2}{3}t, t\right) \Rightarrow t\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$

$B = \left\{\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)\right\}$

---

Jsou dána LZ $\mathcal{A}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a $\mathcal{B}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, pro která platí: $\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2,\ x_1 + 2x_2 - x_3)$

$\mathcal{B}(1,2) = (-1, 0, -3),\quad \mathcal{B}(2,1) = (1, 3, 0)$

Najděte matici složeného LZ $\mathcal{B}\circ\mathcal{A}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vzhledem ke standardním bázím.

$\mathcal{B}(x) = \alpha(1,2) + \beta(2,1)$

$\mathcal{A}(x) = \alpha(-1, 0, -3) + \beta(1, 3, 0)$

$\mathcal{A}(x_1) = -\alpha + \beta$

$\mathcal{A}(x_2) = 0 + 3\beta$

$\mathcal{A}(x_3) = -3\alpha + 0$

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{B}(x_1) = \alpha + 2\beta \\ \mathcal{B}(x_2) = 2\alpha + \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = x_1 - 2\beta \\ \beta = \dfrac{-x_2 + 2x_1}{3} \\ \alpha = \dfrac{3x_1 + 2x_2 - 4x_1}{3} \end{array}$$

3

$$\mathcal{A}(x_1) = -\alpha + \beta = \frac{-(3x_1+2x_2-4x_1)}{3} + \frac{(-x_2+2x_1)}{3} = x_1 - x_2$$

$$\mathcal{A}(x_2) = 0 + 3\beta = \frac{3(-x_2+2x_1)}{3} = -x_2 + 2x_1$$

$$\mathcal{A}(x_3) = -3\alpha + 0 = \frac{-3(3x_1+2x_2-4x_1)}{3} = x_1 - 2x_2$$

$$\mathcal{B}(x_1, x_2) = (x_1 - x_2,\ -x_2 + 2x_1,\ x_1 - 2x_2)$$

„vložíme $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$"

$$(\mathcal{B}\circ\mathcal{A}) = (x_1+2x_2-(x_1+2x_2-x_3),\ -(x_1+2x_2-x_3)+2(x_1+2x_2),$$
$$x_1+2x_2-2(x_1+2x_2-x_3)) = (x_3,\ x_1+2x_2+x_3,\ -x_1-2x_2+2x_3)$$

matice $(\mathcal{B}\circ\mathcal{A})$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

ROVNICE

①

Vypočtěte všechny matice X, pro které platí

$A^2 \cdot X = B - X$. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) upravit rovnici

$A^2 \cdot X = B - X \rightarrow A^2X + X = B \rightarrow A^2X + EX = B \rightarrow$

$(A^2 + E)X = B \rightarrow X = (A^2+E)^{-1} \cdot B$

2) dílčí výpočty

$A^2 = A \cdot A \rightarrow$ klasické násobení

$A^2 + E \rightarrow$ klasický součet

3) výpočet $(A^2+E)^{-1}$

a) GEM $(A^2+E) \mid E \sim E \mid (A^2+E)^{-1}$

NEBO

b) determinantem $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot D^T$ (matice doplňků)

4) poslední násobení $(A^2+E)^{-1} \cdot B$

$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

---

**PŘÍKLAD 5.5:** Najděte inverzní matice k maticím $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ a $\mathbf{D} = \mathbf{BA}$, kde $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou matice z příkladu 5.4.

*Řešení:* Vzhledem k tvaru matic $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ bude poměrně snadné najít matice k nim inverzní. Matice $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ proto určíme ze vztahů

$$\mathbf{C}^{-1} = (\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}, \qquad \mathbf{D}^{-1} = (\mathbf{BA})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}.$$

**PŘÍKLAD 5.2:** Řešte maticovou rovnici $\mathbf{AXB}+\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ s neznámou maticí $\mathbf{X}$, kde

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1, & 1, & 1\\ 0, & 0, & 1\\ 0, & 1, & 1\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}5, & 4, & 2\\ 4, & 1, & 0\\ 2, & 0, & -1\end{pmatrix}.$$

*Řešení:* Upravujeme rovnici

$$\begin{gathered}\mathbf{AXB}+\mathbf{AX}=\mathbf{B}\\ \mathbf{AXB}+\mathbf{AXE}=\mathbf{B}\\ \mathbf{AX}(\mathbf{B}+\mathbf{E})=\mathbf{B}.\end{gathered}$$

Protože

$$\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix}1, & 1, & 1\\ 0, & 0, & 1\\ 0, & 1, & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

a

$$\det(\mathbf{B}+\mathbf{E})=\begin{vmatrix}6, & 4, & 2\\ 4, & 2, & 0\\ 2, & 0, & 0\end{vmatrix}=-8\neq 0,$$

existují matice $\mathbf{A}^{-1}$ a $(\mathbf{B}+\mathbf{E})^{-1}$. Můžeme proto v úpravách rovnice pokračovat dále. Dostáváme:

$$\begin{gathered}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX}(\mathbf{B}+\mathbf{E})(\mathbf{B}+\mathbf{E})^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{B}+\mathbf{E})^{-1}\\ \mathbf{EXE}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{B}+\mathbf{E})^{-1}\\ \mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{B}+\mathbf{E})^{-1}.\end{gathered}$$

Inverzní matice k $\mathbf{A}$ a $(\mathbf{B}+\mathbf{E})$ nalezneme pomocí řádkových úprav. Máme

$$(\mathbf{A}|\mathbf{E})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1, & 1, & 1, & 1, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 1, & 0, & 1, & 0\\ 0, & 1, & 1, & 0, & 0, & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1, & 1, & 1, & 1, & 0, & 0\\ 0, & 1, & 1, & 0, & 0, & 1\\ 0, & 0, & 1, & 0, & 1, & 0\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1, & 0, & 0, & 1, & 0, & -1\\ 0, & 1, & 1, & 0, & 0, & 1\\ 0, & 0, & 1, & 0, & 1, & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1, & 0, & 0, & 1, & 0, & -1\\ 0, & 1, & 0, & 0, & -1, & 1\\ 0, & 0, & 1, & 0, & 1, & 0\end{array}\right).$$

(Nejdříve jsme prohodili druhý a třetí řádek, pak od prvního odečetli druhý a nakonec od druhého odečetli třetí.)

$$(\mathbf{B}+\mathbf{E}|\mathbf{E})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}6, & 4, & 2, & 1, & 0, & 0\\ 4, & 2, & 0, & 0, & 1, & 0\\ 2, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}2, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1\\ 4, & 2, & 0, & 0, & 1, & 0\\ 6, & 4, & 2, & 1, & 0, & 0\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}2, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1\\ 0, & 2, & 0, & 0, & 1, & -2\\ 0, & 4, & 2, & 1, & 0, & -3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}2, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1\\ 0, & 2, & 0, & 0, & 1, & -2\\ 0, & 0, & 2, & 1, & -2, & 1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1, & 0, & 0, & 0, & 0, & \frac{1}{2}\\ 0, & 1, & 0, & 0, & \frac{1}{2}, & -1\\ 0, & 0, & 1, & \frac{1}{2}, & -1, & \frac{1}{2}\end{array}\right).$$

(Nejdříve jsme prohodili první a třetí řádek, pak odečetli od druhého dvojnásobek prvního a od třetího trojnásobek prvního, dále jsme od třetího řádku odečetli dvojnásobek řádku druhého a nakonec jsme všechny řádky vydělili dvěma.)

Dostali jsme tak, že platí

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & -1 \\ 0, & -1, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad (\mathbf{B}+\mathbf{E})^{-1} = \begin{pmatrix} 0, & 0, & \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2}, & -1 \\ \frac{1}{2}, & -1, & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & -2 \\ 1, & -2, & 1 \end{pmatrix}.$$

To znamená, že

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{B}+\mathbf{E})^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1, & 0, & -1 \\ 0, & -1, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5, & 4, & 2 \\ 4, & 1, & 0 \\ 2, & 0, & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & -2 \\ 1, & -2, & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3, & 4, & 3 \\ -2, & -1, & -1 \\ 4, & 1, & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & -2 \\ 1, & -2, & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3, & -2, & -2 \\ -1, & 1, & -1 \\ 0, & 1, & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešením rovnice je tedy matice

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}, & -1, & -1 \\ -\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2}, & 1 \end{pmatrix}.$$

***Příklad 10.***

Vypočítejme matici $\underline{X}$ z rovnice

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \underline{X} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

---

Rovnice je ve tvaru $\underline{A} \cdot \underline{X} = \underline{B}$ a budeme ji řešit vynásobením obou stran rovnice inverzní maticí $\underline{A}^{-1}$ zleva: $\underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{X} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{B}$, takže $\underline{X} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{B}$.

Určíme tedy matici $\underline{A}^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 6 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 0 & -9 & 15 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\underline{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{X} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{B} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 19 & \frac{1}{2} \\ 23 & 0 \end{pmatrix}}}$$

Zkouška:

$$\underline{A} \cdot \underline{X} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 19 & \frac{1}{2} \\ 23 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = \underline{B}$$

# ŘEŠENÍ SOUSTAV



Pro všechna $p \in R$ řešte soustavu homogen. lin. rovnic s maticí soustavy

$$A = \begin{pmatrix} p & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

nejprve eliminujeme matici

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & p & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_2 & x_3 & x_1 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3+p & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

a) $p = 3$

dim řeš: $n-k = 3-2 = 1$

b) $p \neq 3$

$n-k = 3-3 = 0$

pro $p \neq 3$ existuje 1 řešení $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

pro $p = 3$

$x_3 = t \qquad x_2 = -7t \qquad x_1 = 11t$

množ. řeš. $M = (11t, -7t, t) = t(11, -7, 1)$

$B = \{(11, -7, 1)\}$

Množina všech řešení pro $p = 3$ je vektorový prostor s bází $B = \{(11, -7, 1)\}$ a pro $p \neq 3$ existuje jediné řešení $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

---

Pro všechna $p \in R$ řešte soustavu lin. rovnic s rozšířenou maticí soustavy

$$\left(\begin{array}{cccc|c} p & -1 & 5 & 7 & 1 \\ 4 & -2 & 7 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

provedeme eliminaci matice

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -5 & 2 & 1 \\ -2 & 7 & 5 & 4 & 2 \\ -1 & 5 & 7 & p & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \end{array} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2+p & 0 \end{array}\right)$$

$p = 2$

$p \neq 2$

Pro všechna $p \in \mathbb{R}$ řešte soustavu lin. rovnic s rozšířenou maticí soustavy $\left(\begin{array}{cccc|c} p & -1 & 5 & 7 & 1 \\ 4 & -2 & 7 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -5 & 1 \end{array}\right)$

Provedeme eliminaci s GEM:

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -5 & 2 & 1 \\ -2 & 7 & 5 & 4 & 2 \\ -1 & 5 & 7 & p & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \end{array} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2+p & 0 \end{array}\right)$$

hledáme řešení pro $p = 2$ = dim řeš. $n-k = 4-2 = 2$

pro $p \neq 2$

pro $p = 2$

najdeme partikulární řešení pro $2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 1$

za $x_2$ a $x_3$ dosadíme $0$, $x_4 = 0$ $\Rightarrow 2x_1 - 0 + 0 - 0 = 1$

$x_1 = \frac{1}{2}$

$x_0 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, 0\right)$

najdeme řešení homogenní soustavy pro

$2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0$ a $x_3 - 3x_4 = 0$

$x_4 = t$, $x_3 = 3t$, $x_2 = r$, $x_1 = \frac{r+2t}{2}$

~~M=(~~ $M = \left(\frac{r+2t}{2}, r, 3t, t\right)$

$= t\,(1, 0, 3, 1),\ r\left(\frac{1}{2}, 1, 0, 0\right)$

množ. řeš. $M = x_0 + x_n = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, 0\right) + \left\langle (1, 0, 3, 1), \left(\frac{1}{2}, 1, 0, 0\right) \right\rangle$

pro $p \neq 2$

$x_0$ již máme vypočteno, počítáme homog. soustavu

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 1 \\ x_3 - 3x_4 = 0 \\ (-2+p)x_4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (-2+p) \neq 0 \Rightarrow x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_2 = t \\ x_1 = \frac{t}{2} \end{array}$$

množ. řeš. $= \left(\frac{t}{2}, t, 0, 0\right) = t\left(\frac{1}{2}, 1, 0, 0\right)$ ③

všechna řešení $M = x_0 + x_n = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, 0\right) + \langle\left(\frac{1}{2}, 1, 0, 0\right)$

---

Pro všechna $p \in R$ řešte soustavu lin. rovnic s rozšířenou maticí soustavy $\left(\begin{array}{ccc|c} p & 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 & 1 \\ 1 & 1 & p & 1 \end{array}\right)$

Provedeme eliminaci GEM

$$\left(\begin{array}{ccc|c} p & 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 & 1 \\ 1 & 1 & p & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & p & 1 \\ 1 & p & 1 & 1 \\ p & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & p & 1 \\ 0 & -1+p & -p+1 & 0 \\ 0 & 0 & -p^2-p+2 & -p+1 \end{array}\right)$$

najdeme kořeny polynomu $-p^2 - p + 2 = 0$

$b^2 - 4ac$, $\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} < \begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix}$

pro $p = 1$

partikul. řešení $x_0 = x_1 + 0 + 0 = 1$ $\quad x_2 = x_3 = 0$

$x_1 = 1$

$x_0 = (1, 0, 0)$

řešení homog. soustavy

$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad x_2 = t, \ x_3 = r, \ x_1 = -t - r$

$x_n = t(-1, 1, 0), r(-1, 0, 1)$

množ. řešení $= M = x_0 + x_n = (1, 0, 0) + \langle(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\rangle$

pro $p = -2$

$-(-2)^2 + 2 + 2 = 2 + 1$

$0 = 3 \Rightarrow$ soustava nemá řešení

## pro $p \neq (1,2)$

(4)

dim řeš $n-k = 3-3 = 0$

$\Rightarrow$ soustava má jediné řešení

$(-p^2 - p + 2)x^3 = 1-p$

$-(p-1)(p+2)x^3 = 1-p \Rightarrow x_3 = \dfrac{1}{p+2}$

$x_2 = \dfrac{1}{p+2} \qquad x_1 = \dfrac{1}{p+2}$

množ. řeš. $M = \left(\dfrac{1}{p+2}, \dfrac{1}{p+2}, \dfrac{1}{p+2}\right)$

---

Pro všechna $p \in R$ řešte soustavu lineárních rovnic s rozšířenou maticí soustavy $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ p & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 4 \end{array}\right)$

Provedeme eliminaci GEM

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -5 & 3 & 2 \\ -4 & -6 & 7 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & -4 & p & 4 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} x_3 & x_4 & x_2 & x_1 \end{array} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 11 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 14-2p & 3 \end{array}\right)$$

- pro $\underline{p = 7}$ nemá soustava řešení
- hledáme řešení pro $\underline{p \neq 7}$

najdeme partikulární řešení $x_0$

$x_4 = 0 \Rightarrow 11x_1 - 3x_2 - 0 = 9 \qquad (14-2p)x_1 = 3$

$3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 0 = 2$

$x_2 = -3 + \dfrac{11}{14-2p}, \quad x_3 = \dfrac{17(7-p)-32}{14-2p}, \quad x_1 = \dfrac{3}{14-2p}$

$x_0 = \left(\dfrac{3}{14-2p}, -3 + \dfrac{11}{14-2p}, \dfrac{17(7-p)-32}{14-2p}, 0\right)$

- hledáme homogenní řešení

$x_4 = t$

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4t &= 0 \\ 11x_1 - 3x_2 \qquad\quad + 2t &= 0 \\ (14-2p)x_1 \qquad\qquad\qquad &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= \frac{2}{3}t \\ x_3 &= -\frac{1}{3}t \end{aligned}$$

$$x_n = \left(0, \frac{2}{3}t, -\frac{1}{3}t, t\right) = t\left(0, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$$

množ. řešení soustavy

$$M = x_0 + x_n = \left(\frac{3}{14-2p}, -3+\frac{11}{14-2p}, \frac{14(7-p)-32}{14-2p}, 0\right) + \left\langle\left(0, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)\right\rangle$$

# VLASTNÍ ČÍSLA + CHARAKTER. POLYNOM ①

Najděte všechna $p \in R$, pro něž má nenulové řešení maticová rovnice $AX = pX$, kde $X$ je neznámá matice typu $(3,1)$ a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

alespoň pro jednu z těchto hodnot $p$ řešení vypočtěte.

$AX - pX = 0$

$AX - pEX = 0 \rightarrow (A - pE)X = 0$

Pro $X = 0$ má rovnice vždy nulové řešení $\Rightarrow$ zajímá nás, kdy se $(A - pE) = 0$

$\det(A - \lambda E)$ = charakter. polynom matice $A$

$\det(A - \lambda E) = 0$ = charakter. rovnice

Hledáme takové číslo $p$ $(=\lambda)$ a vektor $x = (x_1, x_2, x_3)$, aby byla splněna maticová rovnost $AX = pX$ a přitom vektor ~~x~~ $x$ byl nenulový.

Rozepíšeme si do složek:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x_1 & -x_1 & 0 \\ 0 & x_2 & -4x_2 \\ -x_3 & 0 & 4x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p x_1 \\ p x_2 \\ p x_3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} (1-p)x_1 & -x_1 & 0 \\ 0 & (1-p)x_2 & -4 \\ -x_3 & 0 & (4-p)x_3 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1-p & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 4-p & 0 \end{array}\right)$$

Hledáme nenulové řešení $\Rightarrow$ matice soustavy musí být singulární $\Rightarrow \det = 0$.

$\det = (1-p)(1-p)(4-p) + 0 - 4 - 0 - 0 - 0 = -p^3 + 6p^2 - 9p =$

$= -p^2 + 6p - 9$

<u>pro $p = 0$</u> se $\det(A - pX) = 0$

(2)

pro $p \neq 0$

$-p^2 + 6p - 9 = 0$

najdeme kořeny polynomu $(b^2 - 4ac) = 0$

$$\frac{-b \pm 0}{2a} = 3$$

det $0$ = pro $p = 3$